RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 novembre 1902.

P. Villari, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni ϑ di una variabile e sul teorema di addizione.* Nota del Corrispondente Alfredo Capelli.

La formola fondamentale di Jacobi [1] sulla somma di due prodotti di quattro funzioni ϑ dà origine, come è ben noto, a molte altre formole analoghe che si deducono da essa sia coll'accrescere gli argomenti delle ϑ di mezze unità o di semi-moduli, sia col combinare fra loro linearmente le formole così ottenute. La presente Nota contiene qualche studio da me fatto sul modo possibilmente più semplice di ottenere tutte queste varie formole ed ha per suo primo risultato di condurre a tre tipi generali dai quali si possono poi dedurre tutte le formole in questione con semplici particolarizzazioni delle caratteristiche. Anzichè trattenermi sulle altre cose che ancora dovrei aggiungere a complemento di questo risultato, ho però preferito limitarmi per ora alle poche formole ottenute per dedurre da esse la formola generale per l'addizione delle funzioni ϑ di una variabile. E ciò ho fatto tanto più volentieri, perchè la via da me seguita è tale da rendere la formola generale indipendente dalla natura delle caratteristiche che, nella mia trattazione, possono essere numeri reali o complessi quali si vogliano; e anche perchè ho ragione di ritenere che la formola stessa sia poco conosciuta,

[1] Ges. Werke, I, pag. 506. Cfr. anche Kronecker, *Ueber die Zeit und Art der Entstehung der Jacobischen Thetaformel* (Journal für Math. CVIII, 1891).

benchè essa non sia certamente nuova, almeno per il caso delle caratteristiche intere. Dalle indagini fatte in proposito mi è infatti risultato che questa formola non differisce sostanzialmente da quella già data dallo Smith, sempre nel presupposto non necessario delle caratteristiche intere, in una Memoria ormai antica (1) nella quale lo stesso Autore fa anche menzione, in nota, di alcune formole analoghe già date precedentemente dal Betti (2) e dall' Hermite (3).

I.

1. Dalla formola

$$(1) \qquad \vartheta_{\gamma g}(u) \equiv \vartheta_{\gamma g}(u, \omega) = e^{\pi i g \gamma} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i \omega \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 2\pi i \left(n+\frac{\gamma}{2}\right)\left(u+\frac{g}{2}\right)}$$

che definisce, nel modo più generale, la funzione ϑ di argomento u e modulo ω, con caratteristiche reali o complesse quali si vogliano g e γ, si deduce facilmente, qualunque siano i numeri reali o complessi h e k:

$$(2) \qquad \vartheta_{\gamma g}\left(u + \frac{h}{2} + \frac{k}{2}\omega\right) = e^{-\pi i\left(\frac{k^2\omega}{4} + ku + \frac{3}{2}kg + \frac{3}{2}kh + h\gamma\right)} \vartheta_{\gamma+k, g+h}(u).$$

2. Se ora nella formola fondamentale di Jacobi:

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\vartheta_{00}(z_1)\,\vartheta_{00}(z_2)\,\vartheta_{00}(z_3)\,\vartheta_{00}(z_4) + \vartheta_{10}(z_1)\,\vartheta_{10}(z_2)\,\vartheta_{10}(z_3)\,\vartheta_{10}(z_4) = \\ &= \vartheta_{00}(z_1')\,\vartheta_{00}(z_2')\,\vartheta_{00}(z_3')\,\vartheta_{00}(z_4') + \vartheta_{10}(z_1')\,\vartheta_{10}(z_2')\,\vartheta_{10}(z_3')\,\vartheta_{10}(z_4') \end{aligned}$$

in cui le z_1, z_2, z_3, z_4 sono affatto arbitrarie e

$$(a) \qquad \begin{cases} z_1' = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) \\ z_2' = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 - z_3 - z_4) \\ z_3' = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) \\ z_4' = \frac{1}{2}(z_1 - z_2 - z_3 + z_4) \end{cases}$$

(1) *On a Formula for the Multiplication of four Theta Fonctions* (Proc. London, M. S. I, Maggio 1866).

(2) *La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni* (Annali di Mat. di Tortolini, III, pag. 26, 1860).

(3) *Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques* (Giornale di Liouville, 2ª serie, III, pag. 27, 1858).

si diano alle z_ρ (per $\rho = 1, 2, 3, 4$) rispettivamente gl'incrementi $\frac{1}{2} g_\rho \omega + \frac{1}{2} \gamma_\rho \omega$, cosicchè le z'_ρ riceveranno rispettivamente gl' incrementi $\frac{1}{2} g'_\rho + \frac{1}{2} \gamma'_\rho \omega$, essendo le g' legate alle g, dalle stesse relazioni (a) che legano le z' alle z, cioè:

$$(a)' \begin{cases} g'_1 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) \\ g'_2 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 - g_3 - g_4) \\ g'_3 = \frac{1}{2}(g_1 - g_2 + g_3 - g_4) \\ g'_4 = \frac{1}{2}(g_1 - g_2 - g_3 + g_4) \end{cases} \qquad (a)'' \begin{cases} \gamma'_1 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \\ \gamma'_2 = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4) \\ \gamma'_3 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) \\ \gamma'_4 = \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) \end{cases}$$

essa ci dà:

$$(4) \quad \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{00}\left(z_\rho + \frac{1}{2} g_\rho + \frac{1}{2} \gamma_\rho \omega\right) + \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{10}\left(z_\rho + \frac{1}{2} g_\rho + \frac{1}{2} \gamma_\rho \omega\right) =$$

$$= \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{00}\left(z'_\rho + \frac{1}{2} g'_\rho + \frac{1}{2} \gamma'_\rho \omega\right) + \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{10}\left(z'_\rho + \frac{1}{2} g'_\rho + \frac{1}{2} \gamma'_\rho \omega\right).$$

Dalla (2) si ha intanto:

$$\vartheta_{00}\left(z_\rho + \frac{1}{2} g_\rho + \frac{1}{2} \gamma_\rho \omega\right) = e^{-\pi i\left(\frac{1}{4}\gamma_\rho^2 \omega + \gamma_\rho z_\rho + \frac{3}{2} g_\rho \gamma_\rho\right)} \cdot \vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho)$$

$$\vartheta_{10}\left(z_\rho + \frac{1}{2} g_\rho + \frac{1}{2} \gamma_\rho \omega\right) = e^{-\pi i\left\{\frac{1}{4}\gamma_\rho^2 \omega + \gamma_\rho z_\rho + \frac{3}{2} g_\rho \gamma_\rho + g_\rho\right\}}$$

e similmente per la $\vartheta_{00}\left(z'_\rho + \frac{1}{2} g'_\rho + \frac{1}{2} \gamma'_\rho \omega\right)$ e $\vartheta_{10}\left(z'_\rho + \frac{1}{2} g'_\rho + \frac{1}{2} \gamma'_\rho\right)$;

cosicchè la (4) si può scrivere:

$$e^{-\pi i\left(\frac{\omega}{4}\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho^2 + \sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho z_\rho + \frac{3}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=4} g_\rho \gamma_\rho\right)} \cdot \left\{ \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho) + e^{-\pi i \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g_\rho} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_{\rho+1}, g_\rho}(z_\rho) \right\} =$$

$$= e^{-\pi i\left(\frac{\omega}{4}\sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma_\rho'^2 + \sum_{\rho=1}^{\rho=4}\gamma'_\rho z'_\rho + \frac{3}{2}\sum_{\rho=1}^{\rho=4} g'_\rho \gamma'_\rho\right)} \cdot \left\{ \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho g'_\rho}(z'_\rho) + e^{-\pi i \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g'_\rho} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_{\rho+1}, g'_\rho}(z'_\rho) \right\}.$$

Ma, in virtù delle sostituzioni ortogonali (a), $(a)'$, $(a)''$, si ha:

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=4} \gamma_\rho^2 = \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \gamma_\rho'^2, \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \gamma_\rho z_\rho = \sum_{\rho=1}^{\rho=4} \gamma'_\rho z'_\rho, \quad \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g_\rho \gamma_\rho = \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g'_\rho \gamma'_\rho.$$

Quindi resta semplicemente la formola:

$$(5)\qquad \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_\rho g_\rho}(z_\rho) + e^{-\pi i \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g_\rho} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma_\rho+1,\, g_\rho}(z_\rho) =$$

$$= \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho g'_\rho}(z'_\rho) + e^{-\pi i \sum_{\rho=1}^{\rho=4} g'_\rho} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \vartheta_{\gamma'_\rho+1,\, g'_\rho}(z'_\rho)$$

che si può considerare come una prima generalizzazione della formola fondamentale di Jacobi. Vi sono però, come ora vedremo, altre formole di tipo analogo a questo che pur non sono contenute nella (5).

II.

1. Se poniamo per brevità:

$$\vartheta_{\gamma_1 g_1}(z_1)\, \vartheta_{\gamma_2 g_2}(z_2)\, \vartheta_{\gamma_3 g_3}(z_3)\, \vartheta_{\gamma_4 g_4}(z_4) = [\gamma_1, g_1 ; \gamma_2, g_2 ; \gamma_3, g_3 ; \gamma_4, g_4] = [\gamma, g]$$
$$\vartheta_{\gamma'_1 g'_1}(z'_1)\, \vartheta_{\gamma'_2 g'_2}(z'_2)\, \vartheta_{\gamma'_3 g'_3}(z'_3)\, \vartheta_{\gamma'_4 g'_4}(z'_4) = [\gamma'_1, g'_1 ; \gamma'_2, g'_2 ; \gamma'_3, g'_3 ; \gamma'_4 g'_4] = [\gamma', g']',$$

la formola (5) testè ottenuta si può compendiare così:

$$(I)\qquad [\gamma, g] + e^{-\pi i \Sigma g} [\gamma + 1, g] = [\gamma', g']' + e^{-\pi i \Sigma g'} [\gamma' + 1, g'].$$

Se in questa formola si dà a g_1 l'incremento di 2 e conseguentemente a ciascuna delle g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 l'incremento di 1, e si tengono presenti le formole

$$\vartheta_{\gamma+2,g}(u) = e^{2\pi i g}\, \vartheta_{\gamma,g}(u), \quad \vartheta_{\gamma-2,g}(u) = e^{-2\pi i g}\, \vartheta_{\gamma g}(u)$$
$$\vartheta_{\gamma,g+2}(u) = e^{3\pi i \gamma}\, \vartheta_{\gamma,g}(u), \quad \vartheta_{\gamma,g-2}(u) = e^{-3\pi i \gamma}\, \vartheta_{\gamma g}(u),$$

se ne deduce:

$$(I)'\qquad e^{3\pi i \gamma_1} [\gamma, g] + e^{3\pi i (\gamma_1 + 1)}\, e^{-\pi i \Sigma g} [\gamma + 1, g] =$$
$$= [\gamma', g' + 1]' + e^{-\pi i \Sigma g'} [\gamma' + 1, g' + 1]'.$$

Dalla (I)′ segue ora scambiando, come è lecito (poichè le formole (*a*) seguitano a sussistere anche se si scambiano le z colle z') le γ, g, z rispettivamente colle γ', g', z':

$$(I)''\qquad [\gamma, g + 1] + e^{-\pi i \Sigma g} [\gamma + 1, g + 1] =$$
$$= e^{3\pi i \gamma'_1} [\gamma', g'] + e^{3\pi i (\gamma'_1 + 1)}\, e^{-\pi i \Sigma g'} [\gamma' + 1, g']$$

e, finalmente, operando su questa formola come si è operato sulla (I) per ottenere la (I)′:

$$(I)''' \qquad e^{3\pi i\gamma_1}[\gamma, g+1]+e^{3\pi i(\gamma_1+1)}e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g+1]=$$

$$=e^{3\pi i\gamma_1'}[\gamma', g'+1]+e^{3\pi i(\gamma_1'+1)}e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1].$$

Dalle quattro formole (I), (I)′, (I)″, (I)‴ che scriveremo così:

$$[\gamma, g]+e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g]=[\gamma', g']'+e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g']'$$

$$[\gamma, g]-e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g]=e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma', g'+1]+$$

$$+e^{-3\pi i\gamma_1}e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1]'$$

$$e^{-3\pi i\gamma_1'}[\gamma, g+1]+e^{-3\pi i\gamma_1'}e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g+1]=[\gamma', g']-e^{-\pi i\Sigma g_1'}[\gamma'+1, g']'$$

$$e^{-3\pi i\gamma_1'}[\gamma, g+1]-e^{-3\pi i\gamma_1'}e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g+1]=$$

$$=e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma', g'+1]'-e^{-3\pi i\gamma_1}e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1]'$$

segue, sommando membro a membro, la formola:

$$[\gamma, g]+e^{-3\pi i\gamma_1'}[\gamma, g+1]=[\gamma', g']'+e^{-3\pi i\gamma_1}[\gamma', g'+1]'$$

che si può anche scrivere, in virtù delle $(a)''$:

$$(II) \qquad [\gamma, g]+e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma}[\gamma, g+1]=[\gamma', g']'+e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma'}[\gamma', g'+1]'.$$

Se poi le stesse quattro formole si sommano ancora membro a membro dopo avere moltiplicato l'ultima per -1, si ottiene:

$$[\gamma, g]+e^{-\pi i(3\gamma_1'+\Sigma g)}[\gamma+1, g+1]=[\gamma', g']'+e^{-\pi i(3\gamma_1+\Sigma g')}[\gamma'+1, g'+1]'$$

o anche, che è la stessa cosa:

$$(III) \qquad [\gamma, g]+e^{-\pi i(\Sigma g+\frac{3}{2}\Sigma\gamma)}[\gamma+1, g+1]=$$

$$=[\gamma', g']'+e^{-\pi i(\Sigma g'+\frac{3}{2}\Sigma\gamma')}[\gamma'+1, g'+1]'.$$

2. Osserviamo finalmente che dalle stesse quattro formole si hanno oltre alla formola già trovata (I)′ che scriveremo come segue:

$$(I)' \quad [\gamma, g]-e^{-\pi i\Sigma g}[\gamma+1, g]=e^{-\frac{3}{2}\pi i\Sigma\gamma'}\{[\gamma', g'+1]'+e^{-\pi i\Sigma g'}[\gamma'+1, g'+1]'\}$$

mediante analoghe combinazioni lineari, anche le formole:

$$(II)' \qquad [\gamma, g] - e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma}[\gamma, g+1] =$$

$$= e^{-\pi i \Sigma g'}\left\{[\gamma'+1, g'] + e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma'}[\gamma'+1, g'+1]'\right\}$$

$$(III)' \qquad [\gamma, g] - e^{-\pi i(\Sigma g + \frac{3}{2}\Sigma\gamma)}[\gamma+1, g+1] =$$

$$= e^{-\frac{3}{2}\pi i \Sigma\gamma'}[\gamma', g'+1] + e^{-\pi i \Sigma g'}[\gamma'+1, g'].$$

Si osservi però che, come la (I)′ non differiva sostanzialmente dalla (I) da cui si deduceva dando alla g_1 l'incremento di 2, così la (II)′ non differisce sostanzialmente dalla (II) da cui si ricava dando l'incremento di 2 a γ_1; e precisamente in questo stesso modo si deduce dalla (III) la (III)′.

3. Nelle formole (I), (II), (III) le caratteristiche γ, g, γ', g' possono essere dei numeri reali o complessi assoggettati alla sola restrizione di rendere soddisfatte le relazioni $(a)'$ ed $(a)''$. Se però si scelgano per le $g_1, g_2, g_3, g_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ dei numeri razionali interi, e si voglia che riescano intere anche le caratteristiche $g'_1, g'_2, g'_3, g'_4, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \gamma'_4$, è necessario e sufficiente, come appare dalle $(a)'$ ed $(a)''$, che sia:

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \equiv 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \equiv 0 \pmod 2,$$

e sarà poi di conseguenza $\Sigma g' \equiv 0$, $\Sigma\gamma' \equiv 0 \pmod 2$.

Nel caso di caratteristiche *intere* le formole (I), (II), (III) assumono dunque la forma più semplice:

$$(A) \qquad [\gamma, g] + [\gamma+1, g] = [\gamma', g'] + [\gamma'+1, g']$$

$$(B) \qquad [\gamma, g] + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma, g+1] = [\gamma', g'] + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma', g'+1]'$$

$$(C) \qquad [\gamma, g] + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma}[\gamma+1, g+1] = [\gamma', g'] + (-1)^{\frac{1}{2}\Sigma\gamma'}[\gamma'+1, g'+1]'.$$

Si potrebbe dimostrare, su di che non ci indugieremo qui, non essendo ciò necessario allo scopo che per ora ci siamo prefisso, che le formole (A), (B), (C) rappresentano, nel loro insieme, la generalizzazione completa della formola fondamentale di Jacobi, nel senso che: *tutte le formole analoghe alla formola fondamentale di Jacobi che si possono da essa dedurre dando alle z incrementi di mezze unità o di semimoduli e combinando poi linearmente in un modo qualunque le formole così ottenute, sono necessariamente contenute, come caso particolare, nell'una o nell'altra delle tre formole* (A), (B), (C).

4. Dalla formola generale (I) e dalla (I)′ dell'art. 2 segue sommando o sottraendo membro a membro:

$$(IV) \qquad 2[\gamma, g] = [\gamma', g']' + e^{-\pi i(3\gamma_1 + 2g_1)}[\gamma' + 1, g' + 1]' + e^{-2\pi i g_1}[\gamma' + 1, g']' + e^{-3\pi i \gamma_1}[\gamma', g' + 1]'$$

e

$$2e^{-\pi i \Sigma g}[\gamma + 1, g] = [\gamma', g']' - e^{-\pi i(3\gamma_1 + 2g_1)}[\gamma' + 1, g' + 1]' + e^{-2\pi i g_1}[\gamma' + 1, g']' - e^{-3\pi i \gamma_1}[\gamma', g' + 1]'.$$

Di queste due formole però la seconda non differisce sostanzialmente dalla prima da cui si deduce immediatamente accrescendo le γ di un'unità.

Se poi sottoponiamo le g e γ alla condizione di essere razionali intere e soddisfare alle congruenze:

$$\Sigma g \equiv 0 \ , \ \Sigma \gamma \equiv 0 \pmod 2,$$

la (IV) prende la forma più semplice

$$(D) \qquad 2[\gamma, g] = [\gamma', g']' + (-1)^{\gamma_1}[\gamma' + 1, g' + 1]' + [\gamma' + 1, g']' + (-1)^{\gamma_1}[\gamma', g' + 1]'$$

in cui anche le g' e γ' riusciranno numeri interi.

Sarebbe facile dedurre le formole (A), (B), (C) dall'unica formola (D). Quest'ultima è ad esse preferibile dal punto di vista della simmetria; e specialmente poi per il fatto che qui particolarmente c'interessa, che tutte le formole fondamentali per l'addizione delle funzioni ϑ si deducono da essa, come ora passiamo a vedere, con semplici particolarizzazioni delle caratteristiche g e γ e degli argomenti z, senza che sia poi anche necessario di combinare linearmente i risultati ottenuti come accade a chi voglia servirsi della formola fondamentale di Jacobi o delle sue generalizzazioni.

Del resto mi riservo di ritornare, quanto prima mi sarà possibile, sulla formola (D) per dimostrare in base ad un'accurata analisi della formola stessa, come ad essa si possa anche sostituire la formola più semplice:

$$2[\gamma, g] = [\gamma, g]' + (-1)^{g_1 + \gamma_1 + \frac{1}{2}\Sigma g}[\gamma + 1, g + 1]' + (-1)^{g_1 + \frac{1}{2}\Sigma g}[\gamma + 1, g]' + (-1)^{\gamma_1}[\gamma, g + 1]'.$$

III.

1. Se nella formola generale (IV) del paragrafo precedente prendiamo, essendo u e v affatto arbitrarie:

$$z_1 = u + v, \quad z_2 = u - v, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0$$

onde, per le (a):

$$z'_1 = u\,,\quad z'_2 = u\,,\quad z'_3 = v\,,\quad z'_4 = v\,,$$

otteniamo:

$$2\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o)\,.\,\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o) =$$

$$= \vartheta_{\gamma'_1 g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2 g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3 g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4 g'_4}(v) +$$

$$+ e^{-2\pi i g_1}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1+1,\,g'_1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,\,g'_2}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,\,g'_3}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,\,g'_4}(v) +$$

$$+ e^{-3\pi i \gamma_1}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1,\,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2,\,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3,\,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4,\,g'_4+1}(v) +$$

$$+ e^{-\pi i(2g_1+3\gamma_1)}\,.\,\vartheta_{\gamma'_1+1,\,g'_1+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_2+1,\,g'_2+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma'_3+1,\,g'_3+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma'_4+1,\,g'_4+1}(v).$$

Questo risultato, nel mentre che ci permette di abbracciare in un'unica formola le ordinarie 10 formole fondamentali per l'addizione delle funzioni ϑ, ci presenta il teorema di addizione sotto una forma assai più generale del consueto; giacchè le caratteristiche $g_1, g_2, g_3, g_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ sono quì dei numeri affatto arbitrarî, reali od immaginarî.

Così, per esempio, se prendiamo:

$$\gamma_1 = i\,,\ \gamma_2 = i\,,\ \gamma_3 = 0\,,\ \gamma_4 = 0\,,\quad g_1 = i\,,\ g_2 = i\,,\ g_3 = 0\,,\ g_4 = 0\,,$$

cosicchè:

$$\gamma'_1 = i\,,\ \gamma'_2 = i\,,\ \gamma'_3 = 0\,,\ \gamma'_4 = 0\,,\quad g'_1 = i\,,\ g'_2 = i\,,\ g'_3 = 0\,,\ g'_4 = 0\,,$$

troviamo subito:

$$2\,\vartheta^2_{00}(o)\,.\,\vartheta_{i,i}(u+v)\,.\,\vartheta_{i,i}(u-v) =$$

$$= \vartheta^2_{i,i}(u)\,\vartheta^2_{00}(v) + e^{2\pi}\,\vartheta^2_{i+1,i}(u)\vartheta^2_{10}(v) + e^{3\pi}\,\vartheta^2_{i,i+1}(u)\,\vartheta^2_{01}(v) + e^{5\pi}\,\vartheta^2_{i+1,i+1}(u)\,\vartheta^2_{11}(v).$$

2. Se per le g e γ si prendono dei numeri razionali interi soddisfacenti alle condizioni:

$$(\alpha)\qquad g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \equiv 0\,,\quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \equiv 0 \pmod 2,$$

anche le g' e γ' riusciranno intere secondo le relazioni:

$$\begin{aligned} g'_1 &= \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) & \gamma'_1 &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)\\ g'_2 &= \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2 - g_3 - g_4) & \gamma'_2 &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4)\\ g'_3 &= \tfrac{1}{2}(g_1 - g_2 + g_3 + g_4) & \gamma'_3 &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4)\\ g'_4 &= \tfrac{1}{2}(g_1 - g_2 - g_3 + g_4) & \gamma'_4 &= \tfrac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) \end{aligned}$$

cosicchè la formola generale di addizione delle funzioni ϑ *a caratteristiche razionali intere* prenderà la forma più semplice:

$$2\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,.\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)\,.\,\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o)\,\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o) =$$
$$= \vartheta_{\gamma_1' g_1'}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_2' g_2'}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_3' g_3'}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma_4' g_4'}(v) +$$
$$+ \vartheta_{\gamma_1'+1,\, g_1'}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_2'+1,\, g_2'}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_3'+1,\, g_3'}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma_4'+1,\, g_4'}(v) +$$
$$+ (-1)^{\gamma_1}\,\vartheta_{\gamma_1',\, g_1'+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_2',\, g_2'+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_3',\, g_3'+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma_4'+1,\, g_4'}(v) +$$
$$+ (-1)^{\gamma_1}\,\vartheta_{\gamma_1'+1,\, g_1'+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_2'+1,\, g_2'+1}(u)\,.\,\vartheta_{\gamma_3'+1,\, g_3'+1}(v)\,.\,\vartheta_{\gamma_4'+1,\, g_4'+1}(v)\,.$$

Questa formola dà effettivamente l'espressione del prodotto

$$\vartheta_{\gamma_1 g_1}(u+v)\,\vartheta_{\gamma_2 g_2}(u-v)$$

in funzione di ϑ col solo argomento u o col solo argomento v, comunque si scelgano i quattro numeri interi $\gamma_1, g_1, \gamma_2, g_2$; poichè è poi sempre possibile (come subito si riconosce) di determinare gli altro quattro numeri interi $\gamma_3, g_3, \gamma_4, g_4$ in modo da rendere soddisfatte le congruenze (α) evitando sia la soluzione $\gamma_3 \equiv g_3 \equiv 1$ per la quale sarebbe $\vartheta_{\gamma_3 g_3}(o) = 0$, come la soluzione $\gamma_4 \equiv g_4 \equiv 1$ per la quale riuscirebbe nullo il coefficiente $\vartheta_{\gamma_4 g_4}(o)$.

Quanto a questa formola generale, mi riservo di ritornare sull'argomento prossimamente, potendo essa, come è naturale, ulteriormente semplificarsi quando si prenda come punto di partenza, in luogo della formola (D), l'altra formola da me già accennata in fine del precedente paragrafo.

Fisica. — *Intorno a due modi per determinare il raggio di curvatura della superficie dello spigolo nei coltelli delle bilancie e dei pendoli.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio Blaserna.

Le due faccie laterali del coltello di sospensione d'una bilancia o d'un pendolo, evidentemente non s'incontrano secondo una linea matematica ma sono raccordate da una superficie cilindrica, la cui sezione retta può considerarsi come approssimativamente circolare o ellittica ed il cui raggio di curvatura è bensì piccolissimo ma non è infinitesimo, e non è neppure tanto piccolo quanto sarebbe fisicamente possibile, perchè bisogna evitare che questa superficie sia troppo soggetta a rompersi o smussarsi, ciò che renderebbe il coltello pressochè inservibile.

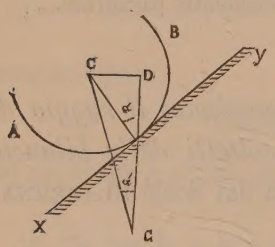
La conoscenza di questo raggio di curvatura è utile nel caso delle bilancie, poichè essa da modo di osservare la relazione che passa fra esso raggio

e varie proprietà della bilancia come sensibilità, resistenza, attrito, e di determinare, non empiricamente ma razionalmente, la forma più conveniente da darsi allo spigolo.

Tale conoscenza inoltre è necessaria nel caso del pendolo, perchè la grandezza di questo raggio influisce sensibilmente sulla durata delle oscillazioni, e perciò esso entra nell'espressione della lunghezza ridotta del pendolo fisico per la determinazione della gravità, ed inoltre la diversità del suo valore nei diversi punti della sezione retta produce nelle oscillazioni con diverse ampiezze, una variazione della durata di cui non sarebbe possibile tener conto se non si conoscessero i valori di questo raggio per tutti i punti della sezione retta che vengono a contatto col piano d'appoggio.

Generalmente si considera come impossibile o molto difficile la determinazione di questo raggio, e nelle determinazioni della gravità si procura di eliminarne l'influenza osservando le durate d'oscillazione di pendoli di diversa lunghezza con un identico coltello; credo però che coi due metodi seguenti si ottenga un valore abbastanza approssimato di questo raggio di curvatura per una inclinazione qualsiasi del pendolo.

Il primo di questi metodi che si applica direttamente ai coltelli delle bilancie, consiste nell'osservare di quanto s'inclina il giogo in equilibrio, quando il piano d'appoggio viene inclinato d'un determinato angolo nel piano d'oscillazione; se il raggio di curvatura cercato fosse infinitamente piccolo, il giogo conserverebbe immutata la sua orizzontalità o la sua inclinazione, mentre se questo raggio è finito, il giogo seguirà alquanto l'inclinazione che si produce nel piano d'appoggio e la seguirà tanto più quanto maggiore è questo raggio e quanto minore è la distanza fra il centro di gravità del giogo e l'asse di curvatura.



Sia XY il piano d'appoggio, ABC la sezione retta della superficie dello spigolo supposta circolare, enormemente ingrandita, C il centro di questo circolo, G il centro di gravità del giogo; sia inoltre ϱ il raggio del circolo ABC e δ la distanza CG fra il centro di curvatura e quello di gravità, sia α l'angolo del piano d'appoggio col piano orizzontale ed α' l'angolo della CG colla verticale.

Perchè il giogo sia in equilibrio occorrerà sempre che il centro di gravità si trovi sulla verticale passante per il punto d'appoggio; se il piano d'appoggio è orizzontale, la CG sarà verticale e sarà $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$; se invece, come appare nella figura, il piano d'appoggio è inclinato d'un angolo α, perchè la suddetta condizione si verifichi, dovrà la CG deviare dalla verticale d'un angolo α' tale che sia:

$$CD = \varrho \operatorname{sen} \alpha = \delta \operatorname{sen} \alpha'$$

Se ϱ fosse uguale a δ dovrebbe essere $\alpha = \alpha'$, ossia il giogo s'inclinerebbe tanto quanto il piano d'appoggio, se ϱ è minore di δ sarà $\alpha' < \alpha$ ed il giogo s'inclina meno del piano d'appoggio, se però fosse $\varrho > \delta$ sarebbe $\alpha' > \alpha$, e l'inclinazione del piano d'appoggio causerebbe una inclinazione maggiore della posizione d'equilibrio del giogo che così costituirebbe una livella molto sensibile, valevole per elementi di superficie.

In alcune bilancie totalmente immerse, estremamente sensibili, nelle quali il coltello mediano era sostituito da due punte coniche di vetro terminanti con calotte sferiche di 0,25 a 0,5 mm. di raggio, ebbi spesso occasione di osservare questa grande variabilità della posizione d'equilibrio del giogo per effetto degli spostamenti del sostegno.

Dalla formula che dà la sensibilità della bilancia si ricava per δ il valore:

$$\delta = \frac{p\mathrm{L}}{\mathrm{P}\ \mathrm{tang}\ \beta}$$

dove p e β sono l'eccesso di peso in uno dei piatti e l'inclinazione che esso produce nel giogo, L è la lunghezza di ciascun braccio e P il peso del giogo. Si ha quindi:

$$\varrho = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{P}} \cdot \frac{p}{\mathrm{tang}\ \beta} \cdot \frac{\mathrm{sen}\ \alpha'}{\mathrm{sen}\ \alpha}$$

dove di solito, per la piccolezza degli angoli, potranno prendersi gli archi invece dei seni e della tangente.

Il suddetto ragionamento e il valore di ϱ che ne deriva, valgono anche se la sezione retta della superficie dello spigolo non è circolare; in tal caso ϱ è il raggio di curvatura di questa sezione nel punto di contatto col piano d'appoggio e varia colla posizione di questo punto.

È però da notare che in questo caso il valore δ varia alquanto coll'inclinazione del giogo, quindi converrà nella formula suddetta introdurre quel valore di δ che vale per l'inclinazione α' che si considera. Quindi se chiamiamo p_1 quel peso che collocato su uno dei piatti, produce sul giogo in bilico su un piano orizzontale l'inclinazione α', sarà:

$$\varrho = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{P}} \cdot \frac{p_1}{\mathrm{tang}\ \alpha'} \cdot \frac{\mathrm{sen}\ \alpha'}{\mathrm{sen}\ \alpha}$$

ossia prendendo gli archi invece dei seni e della tangente, si avrà

$$\varrho = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{P}} \cdot \frac{p_1}{\alpha}$$

dove p_1 è quel peso che collocato su un piatto produce nel giogo in bilico

su un piano orizzontale la stessa inclinazione che vi produrrebbe l'inclinazione α del piano d'appoggio. Osservando le inclinazioni prodotte nel giogo da varî pesi e cercando poi le inclinazioni del piano d'appoggio che producono lo stesso effetto, si avranno varie coppie di valori di p_1 ed α che daranno i corrispondenti valori di ϱ.

È inoltre da notare che in questo caso gli angoli α ed α', dovranno esser contati rispettivamente dal piano orizzontale e dalla verticale, mentre nel caso che lo spigolo abbia la sezione retta circolare α ed α', si possono contare da un piano qualsiasi e dalla corrispondente posizione della CG e quindi si può prendere per α una qualsiasi variazione dell'inclinazione del piano d'appoggio e per α' la corrispondente variazione dell'inclinazione del giogo.

Per determinare α ed α' nelle comuni bilancie di precisione col lungo indice rivolto in basso, si può collocare entro la vetrina della bilancia un filo a piombo il cui punto di sospensione si trovi sul prolungamento dello spigolo del coltello e che cada davanti alla scala e coincida coll'indice del giogo in bilico su piano orizzontale. Allora, se si girano in senso inverso le viti di livello di destra e di sinistra della bilancia, il suo piano s'inclina e s'inclina altresì il piano d'agata d'un angolo α che è misurato dallo spostamento del filo a piombo sulla scala; il giogo invece s'inchina d'un angolo α' che è dato dallo spostamento dell'indice rispetto al filo a piombo.

Non ho seguito questo modo di procedere che tuttavia credo suscettibile di molta precisione purchè si abbia cura che il punto d'attacco del filo a piombo, sia esattamente sul prolungamento dello spigolo, e quando inoltre si osservino gli spostamenti con un mezzo d'ingrandimento; ho creduto più comodo di misurare le inclinazioni per mezzo di specchietti fissati al giogo ed al sostegno.

Ho incominciato anzitutto per cambiare uno dei vetri laterali della bilancia di precisione (di Deleuil) sostituendo un vetro da specchi al vetro comune attraverso il quale si vedeva molto confusamente; quindi ho fissato al giogo e precisamente all'indice a circa 3/4 della sua altezza dal basso uno specchietto parallelo all'indice, e perpendicolare al piano d'oscillazione e rivolto dalla parte del vetro da specchi suddetto. Fissai prima lo specchietto con cera, ma esso lentamente cadeva ruotando attorno all'indice, e ad ogni nuova determinazione occorreva regolar nuovamente la sua posizione, e perciò mi decisi di fissarlo con un mastice poco plastico di colofonia e gommalacca. Collocai inoltre dentro alla vetrina della bilancia un'asta d'ottone su piede di piombo, che portava in cima uno specchietto verticale che disponevo affatto contiguo al primo, regolando l'orientazione e l'inclinazione del medesimo in modo che i due specchietti fossero all'incirca nello stesso piano e che dirigendo sui medesimi un cannocchiale apparissero assieme nel campo, in essi apparissero le immagini di una scala verticale opportunamente collocata e queste immagini fossero intersecate dal reticolo all'incirca alla stessa divisione.

Riferisco come esempio i risultati di alcune determinazioni, osservando però che esse non possono esser prese nè come modello, nè come misura del grado di precisione ottenibile. Un poco per la mancanza di pratica del metodo, un poco perchè non era mio scopo la determinazione esatta del raggio di curvatura, ma solo di osservare in complesso come il metodo riuscisse in pratica, lasciai sussistere molte cause d'errore. Così, il cannocchiale non era del tutto stabile, la scala non era sempre verticale, nè ugualmente inclinata, non era ben visibile contemporaneamente in entrambi gli specchietti e spostandola variava alquanto la divisione intersecata dal reticolo, lo specchietto fissato al giogo era troppo piccolo o imperfetto e l'immagine della scala vi appariva un po' confusa; l'operazione necessaria per cambiare lo specchietto era un po' delicata e non volli intraprenderla. Inoltre è da notare che un grano di pulviscolo appena visibile, sul piano d'agata sotto il coltello, può far variare considerevolmente la posizione d'equilibrio del giogo, e finalmente io non tenni conto delle possibili differenze del valore di ϱ e di quelli di δ e della sensibilità che ne derivano, ed anzi inconsideratamente determinai quest'ultima rapidamente, con minor cura che non usassi per α ed α', mentre nella formula ha uguale importanza.

Il peso del giogo collo specchietto era $P = 248{,}7$ gr., la lunghezza di ciascun braccio $L = 18{,}25$ cm., quindi $L : P = 0{,}0733$. Nelle prime determinazioni 1 mgr. all'estremità del giogo faceva spostare l'immagine della scala, distante 213 cm. dagli specchietti, di 100 cm., quindi $\beta = 100 : 4260$; nell'ultima serie di determinazioni era invece $\beta = 111 : 4260$ nel senso del movimento delle freccie dell'orologio $\beta = 114 : 4260$ nel senso inverso.

Nella seguente tabella, nella 1ª e 2ª linea trovansi riferiti gli spostamenti a ed a' che subivano le immagini della scala per effetto delle inclinazioni α ed α' del sostegno e del giogo, nella 3ª linea trovasi il rapporto $\alpha' : \alpha$, e nella 4ª il valore di ϱ in millimetri calcolato con molte approssimazioni. Le doppie linee verticali separano determinazioni eseguite in epoche e condizioni diverse.

a'	12,0	24,5	19,5	29,5	31	11,6	10,6	13,5	13,0
a	33,0	35,0	34,5	52,0	54	20,0	20,0	24	23
$\alpha' : \alpha$	0,364	0,70	0,565	0,567	0,574	0,58	0,53	0,563	0,565
ϱ	0,0113	0,0218	0,0176	0,0177	0,0179	0,0160	0,0147	0,0156	0,0157

Ho riferito anche i risultati più discordi, sebbene le principali irregolarità fossero dovute a perturbazioni constatate negli apparecchi; la media di tutti i valori da $\varrho = 0{,}0165$ mm., l'errore probabile, nonostante tutte le circostanze sfavorevoli suddette, non pare che superi il millesimo di millimetro.

Ho applicato lo stesso metodo alla determinazione del raggio di curvatura della superficie dello spigolo del coltello d'una bilancia di Mohr fornita dalla casa Desaga di Heidelberg, strumento che sebbene da molti

anni sia in continuo uso e sia sottoposto a prove ed adattamenti in altri apparecchi, tuttavia continua a funzionare ottimamente.

Misurai anche in questo caso l'inclinazione del piano d'appoggio e del giogo mediante specchietti fissati ai medesimi; siccome il sostegno del giogo era appeso ad un uncino attorno al quale poteva oscillare, producevo l'inclinazione del sostegno spostandolo per mezzo d'un ostacolo contro il quale rimaneva appoggiato e deviato dalla verticale.

Il peso del giogo collo specchietto era di 45 gr., la lunghezza di ciascun braccio 12 cm., la scala era distante 107,5 cm. dagli specchietti e 5 mgr., collocati all'estremità del giogo facevano spostare di 9 mm. la corrispondente immagine della scala. Nella seguente tabella sono indicati con a ed a' gli spostamenti della scala prodotti dalle inclinazioni α ed α' del sostegno e del giogo, con $\alpha' : \alpha$ il rapporto di queste inclinazioni e con ϱ il raggio di curvatura in millimetri che se ne deduce.

a'	7	7	4
a	197	162	81
$\alpha' : \alpha$	0,0355	0,0432	0,0494
ϱ	0,0114	0,0138	0,0158

Da questa tabella risulterebbe che il raggio di curvatura della sezione retta dello spigolo non è costante, ma va decrescendo a misura che ci si allontana dal punto di mezzo, ossia che il taglio del coltello è un po' smussato, forse per effetto del lungo uso; tuttavia la precisione di queste esperienze addotte solo come esempio non mi pare che, senza ulteriore conferma, possa giustificare con sicurezza questa conclusione. Alle ragioni addotte precedentemente, relative alla cura non eccessiva con cui vennero eseguite queste determinazioni, bisogna aggiungere che quelle relative alla bilancia di Mohr sono le prime in ordine di tempo, che la disposizione dell'apparecchio per ciò e per la natura della bilancia era del tutto provvisoria e poco soddisfacente, che la bilancia essendo di precisione media si prestava poco a misure molto esatte, che per la poca sensibilità ossia per il valore relativamente grande di δ l'inclinazione del giogo variava pochissimo, e d'altra parte per le circostanze suddette non era del tutto impossibile anche l'errore di 1 mm., nel valore di a'; finalmente il coltello riposava su due pezzi cilindrici, concavi, di pietra dura, e l'inclinazione del piano tangente d'appoggio del coltello poteva essere un pò diversa da quella del sostegno osservata mediante lo specchietto.

Credo perciò che dalla precedente tabella si possa solo dedurre un valor medio di ϱ che sarebbe di 0,0137 mm., con un errore possibile di qualche millesimo di millimetro, valore non molto diverso da quello ottenuto per il coltello della bilancia di Deleuil.

Il metodo precedente non si applica direttamente ai coltelli dei pendoli, perchè in questi la distanza δ del centro di gravità dall'asse di curvatura della superficie dello spigolo è grandissima e quindi l'inclinazione che subisce il pendolo è minima anche quando s'inclina molto il sostegno. Occorrerebbe togliere il coltello e fissarlo in una specie di giogo da bilancia, oppure togliere la lente del pendolo e prolungare l'asta al disopra del coltello in modo che il centro di gravità venisse vicinissimo allo spigolo.

Un metodo che si applica direttamente ai coltelli dei pendoli, è quello di far riposare il coltello sopra un sistema di due coppie parallele di ruote coassiali, quale si usa nella macchina d'Atwood per diminuire l'attrito della puleggia, in modo che il coltello cada sulle intersezioni delle ruote al posto dell'asse della puleggia suddetta.

Occorrerà però che questo sistema di ruote sia costruito appositamente per il coltello, in modo che la distanza delle ruote di ciascuna coppia sia minore della lunghezza del medesimo. Inoltre nella macchina di Atwood le ruote sono tutte indipendenti, mentre credo utile per l'esattezza della costruzione e comodo per l'uso, che le due ruote coassiali di ciascuna coppia siano fissate ad uno stesso asse; così i cuscinetti son due per ciascuna coppia invece di due per ciascuna ruota.

Facendo oscillare o semplicemente deviare il pendolo, l'attrito che si genera sulle linee di contatto dello spigolo colle ruote, mentre da un lato oppone una resistenza al movimento del pendolo, dall'altro agisce in senso contrario al precedente sulle ruote facendole oscillare o deviare; se supponiamo che lo strisciamento della superficie dello spigolo sulle ruote sia nullo, abbiamo che le lunghezze degli archi descritti dalla superficie dello spigolo e dalla periferia delle ruote sono uguali e quindi le ampiezze di questi archi sono in ragione inversa dei raggi rispettivi; quindi se ϱ ed R sono i raggi della sezione retta dello spigolo, supposta circolare, e delle ruote, α ed α' le ampiezze degli archi descritti dal pendolo e dalle ruote, sarà:

$$\alpha\varrho = \alpha' R\,, \qquad \varrho = \frac{\alpha'}{\alpha} R$$

Se la sezione retta dello spigolo non fosse circolare, si otterrebbe collo stesso processo e colla stessa formula il valor medio del raggio di curvatura.

Da quanto precede risulta la possibilità d'una causa d'errore derivante da ciò che lo strisciamento non può essere rigorosamente nullo, come s'è supposto, altrimenti non si produrrebbe l'attrito che fa muovere le ruote. Questo strisciamento sarà tanto maggiore quanto maggiore è l'attrito che si manifesta nella rotazione delle ruote sui loro assi, esso tende a diminuire il valore di α e quindi far apparire il valore di ϱ maggiore del vero. Tuttavia non credo impossibile, nè di render minimo quest'errore usando ruote mobilissime nelle quali agli assi siano sostituiti coltelli riposanti su piani d'agata,

nè di determinare la grandezza di quest'errore sia sperimentalmente che teoricamente supponendo noti i coefficienti d'attrito radente e volvente e i diametri degli assi e della sezione retta dello spigolo.

Non ho potuto fare questo studio perchè non disponevo che di due tribometri molto imperfetti, uno destinato a dimostrare nella scuola le diverse specie di attrito e sufficiente a tale scopo ma disadatto per misure di precisione, l'altro appartenente ad una vecchia macchina d'Atwood in condizioni ancor peggiori.

Mi contentai perciò di verificare sommariamente l'applicabilità del metodo usando il primo dei suddetti tribometri, sebbene l'attrito degli assi delle ruote sui cuscinetti d'ottone apparisse grande. Siccome non avevo un coltello di sospensione lungo quanto la distanza delle ruote di ciascuna coppia, usai come asse d'oscillazione del pendolo un grosso tubo di vetro con foro capillare nelle cui estremità avevo infisso e fissato con mastice le parti quasi cilindriche di due grossi aghi da cucire che riposavano sulle intersezioni delle ruote. L'asta del pendolo fissata perpendicolarmente e nel mezzo di quest'asse era lunga solo circa 10 cm. quanto permetteva la posizione della base del tribometro; però talvolta feci anche uso di un'asta lunga circa 1 m., capovolgendo il tribometro e fissandolo con la base adattata contro la faccia inferiore di un tavolo.

Misurai le deviazioni del pendolo e di una delle ruote fissando ad essi due specchietti contigui ed osservando in essi con un cannocchiale con reticolo le immagini d'una scala verticale. Sarebbe stato preferibile far uso di due cannocchiali e due scale, uno dei quali a forte ingrandimento con relativa scala finamente divisa per osservare nello specchietto fisso alla ruota, la quale si sposta pochissimo.

Nella seguente tabella sono riferiti i risultati di una serie di esperienze; nella 1ª e 2ª linea trovansi gli spostamenti a ed a' delle immagini causati dalle deviazioni del pendolo e della ruota rispettivamente, nella 3ª linea il loro rapporto.

a	201	96	160	136,5	107	137,5	244	316	241,5	315
a'	2,5	1,2	2,1	1,8	1,5	1,75	3,7	3,7	3,1	4,5
$\frac{a}{a'}$	80,4	80	76,2	75,8	71,3	78,6	85,4	85,4	78	70

Il valor medio di a/a' che se ne deduce è 78,0 e siccome il diametro 2R della ruota era di 76 mm., risulta per il diametro dell'asse d'oscillazione del pendolo 76 : 78 mm. ossia 0,974 mm., mentre misurato direttamente con un compasso a vite lo stesso diametro risultò di 1,05 mm.

Le condizioni in cui furono eseguite queste determinazioni erano molto meno soddisfacenti di quelle relative al coltello delle bilance, e non sarebbe stato possibile migliorarle senza usare un altro apparecchio costruito appo-

sitamente e con cura, ed esse spiegano le differenze dei singoli valori di $a:a'$. La differenza tra il valore ottenuto per 2ϱ coll'apparecchio suddetto e quello ottenuto direttamente col micrometro conferma l'esistenza dell'accennata causa d'errore prodotta dallo strisciamento dell'asse sulle ruote; tuttavia questa differenza non è così grande che non si possa sperare di ottenere un buon valore del diametro cercato, sia diminuendo nel modo sopraccennato lo strisciamento, sia correggendo l'errore che esso produce.

Ho eseguito molte esperienze su questo modo di sospensione del pendolo, che così oscilla rigorosamente attorno all'asse di curvatura dello spigolo; esse potranno esser oggetto d'una prossima Nota. Sarà inoltre oggetto d'uno studio speciale la determinazione del raggio di curvatura degli spigoli naturali ed artificiali delle sostanze cristallizzate ed amorfe, la quale forse potrà fornire dati importanti sulla struttura molecolare delle medesime.

Chimica. — *Sull'acido monocloroplatinico* (1). Nota II (2) di Italo Bellucci, presentata dal Socio Cannizzaro.

Sale di argento $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ag^2$.

La riduzione del composto venne fatta ad elevata temperatura in corrente d'idrogeno.

1°. Gr. 0,3398 di sostanza ridotti ad elevata temperatura in crogiuolo di Rose ed in corrente d'idrogeno dettero gr. 0,2612 di platino ed argento.

2°. Gr. 0,3748 di sostanza ridotti in egual modo, lasciarono per residuo gr. 0,2886 di platino ed argento. Questo residuo, staccato accuratamente dal crogiuolo, venne trattato ripetutamente fino all'ebollizione, con ac. solforico concentrato. Rimasero indisciolti gr. 0,1350 di platino.

3°. Gr. 0,3516 di sostanza egualmente ridotti dettero gr. 0,2704 di platino e argento, che, trattati come sopra, con ac. solforico concentrato, lasciarono indietro gr. 0,1270 di platino.

4°. Gr. 0,4867 di sostanza disaggregati con carbonato sodico-potassico, in crogiuolo di porcellana, dettero gr. 0.1292 di cloruro di argento.

Riferendosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per
	I	II	III	IV	$[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ag^2$
Pt + Ag	76.87	77.00	76.91	—	77.30
Pt	—	36.02	36.12	—	36.67
Ag	—	40.98	40.79	—	40.63
Cl	—	—	—	6.56	6.67

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Roma.

(2) V. pag. 241.

Sale di tallio $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Tl^2$.

Per determinare e separare il platino dal tallio, ho adoperato il metodo usato dal Miolati (1) per il sale di tallio dell'acido tetracloroplatinico, metodo che dà risultati veramente buoni.

1°. Gr. 0,4232 di sostanza, trattati nel modo indicato di separazione del platino dal tallio, fornirono gr. 0,1131 di platino.

2°. Gr. 0,4112 di sostanza, trattati id. id., dettero gr. 0,1094 di platino e gr. 0,3726 di ioduro talloso.

3°. Gr. 0,4006 di sostanza, trattati id. id., dettero gr. 0,1068 di platino e gr. 0,3622 di ioduro talloso.

4°. Gr. 0,4410 di sostanza, disaggregati con carbonato sodico-potassico, in crogiuolo di porcellana, dettero gr. 0,0836 di cloruro di argento.

Riferendosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato				Calcolato per
	I	II	III	IV	$[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Tl^2$
Pt	26.72	26.61	26.66	—	26.92
Tl	—	55.89	55.77	—	56.42
Cl	—	—	—	4.68	4.90

Sale di piombo $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Pb\,,\,Pb\,(OH)^2$.

Per la precipitazione di questo sale si adoperò acetato neutro di piombo. Per la separazione del platino dal piombo, una data quantità di sostanza si evaporò ripetutamente in crogiuolo di platino con acido solforico concentrato, pesando il residuo di platino e solfato di piombo. Questo residuo poi si pesò nuovamente dopo averlo esaurito con acetato di ammonio che ne aveva asportato il solfato di piombo.

1°. Gr. 0,4031 di sostanza dettero gr. 0,4222 di platino e solfato di piombo e gr. 0,1036 di platino.

2°. Gr. 0,3960 di sostanza fornirono gr. 0,4157 di platino e solfato di piombo e gr. 0,1024 di platino.

3°. Gr. 0,4575 di sostanza disaggregati con carbonato sodico-potassico, dettero gr. 0,0774 di cloruro di argento.

Riportandosi a 100 parti di sostanza, si ha:

	Trovato			Calcolato per
	I	II	III	$[Pt\,Cl\,(OH)^5\,Pb\,,\,Pb\,(OH)^2$
$Pt + SO^4\,Pb$	104.73	104.96	—	104.93
Pt	25.70	25.86	—	25.53
Pb	54.11	54.02	—	54.23
Cl	—	—	4.18	4.65

(1) Zeitschr. f. anorg. Chemie *XXII*, 460.

Sale di mercurio $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Hg$.

Il platino si determinò quale residuo della calcinazione. Il cloro fondendo il composto con idrato sodico.

1°. Gr. 0,3230 di sostanza, calcinati, lasciarono per residuo gr. 0,1208 di platino.

2°. Gr. 0,2926 di sostanza, id. id., dettero gr. 0, 1097 di platino.

3°. Gr. 0.4388 di sostanza, fusi con idrato sodico, dettero gr. 0,1138 di cloruro di argento.

Riferendosi a 100 parti, si ha:

	Trovato			Calcolato per
	I	II	III	$[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Hg$
Pt	37.40	37.49	—	37.78
Cl	—	—	6.41	6.88

Acido monocloroplatinico $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,H^2$.

Sono riuscito ad ottenere una soluzione acquosa di acido monocloroplatinico $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,H^2$, agendo con acido solforico sul sale di bario $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,Ba$, $H^2\,O$, nelle condizioni che qui riferisco. Ad una quantità pesata di sale di bario, seccato bene fra carta, ridotto in polvere finissima, si aggiunge entro un recipiente di vetro relativamente grande, a tappo largo smerigliato, un volume calcolato di soluzione di acido solforico $^{norm}/_{10}$, tale da non essere completamente sufficiente a precipitare tutto il bario del sale allo stato di solfato (c.c. 35 per ogni grammo di sale platinico, mentre teoricamente se ne richiedono c.c. 42,5). Si lascia stare così il recipiente in luogo fresco per almeno ventiquattro ore, curando di squassarlo molto spesso e vivacemente.

A capo delle ventiquattro ore, dopo essersi assicurati che più non vi rimangono quantità di acido solforico sensibili ai reattivi, si filtra il liquido per separarlo dallo strato di solfato di bario formatosi e dalla eccedenza del sale di platino indecomposto.

La soluzione dell'acido monocloroplatinico, così ottenuta, si presenta con un leggero colorito giallo-rossastro; ha reazione nettamente acida alle carte reattive; scompone lentamente a freddo, rapidamente a caldo, i carbonati, e si mantiene limpida anche in capo a qualche giorno.

Volli determinare anzitutto se in tale soluzione il platino ed il cloro si mantenevano nel rapporto voluto di 1:1. Da un volume qualunque di

essa, addizionata di un po' di acido acetico, precipitai a b. m. il platino con nastro di magnesio e nel filtrato, dopo la separazione del platino, il cloro per precipitazione con nitrato di argento. Ottenni così gr. 0,3872 di platino e gr. 0,2811 di cloruro di argento corrispondenti a gr. 0,0695 di cloro, il che porta ad un rapporto tra platino e cloro come 1:0,987, cioè molto vicino a quello richiesto di 1:1.

Stabilendo poi il titolo della soluzione di acido monocloroplatinico dal platino contenuto in un dato numero di c.c., ho titolato detta soluzione, convenientemente diluita con acqua, con una $^{norm}/_{10}$ di idrato sodico, adoperando come indicatore la fenol-ftaleina.

Dal comportamento acidimetrico risulta evidente la presenza nella soluzione di un acido bibasico, poichè per ogni atomo di platino furono necessarie per la neutralizzazione del liquido due molecole di idrato sodico.

I dati ottenuti sono i seguenti:

1°. Una soluzione contenente gr. 0,1526 di acido monocloroplatinico richiese per essere neutralizzata cmc. 9,95 di Na HO $^{N}/_{10}$, mentre la teoria ne richiedeva 9,62.

2°. Una soluzione contenente gr. 0,1914 di acido monocloroplatinico (di preparazione diversa dalla precedente), richiese per la neutralizzazione cmc. 12,40 di Na HO $^{N}/_{10}$, mentre la teoria ne richiedeva cmc. 12,07.

La soluzione dell'acido monocloroplatinico, dopo lungo soggiorno nel vuoto su acido solforico, lascia un residuo bruno sciropposo, deliquescentissimo, da cui non è possibile separare cristalli. Tale soluzione trattata con le soluzioni degli idrati di bario, calcio e stronzio rigenera gli stessi precipitati finemente cristallini che si ottengono direttamente per azione della luce solare; trattata con le soluzioni degli acetati di argento, tallio, piombo e mercurio precipita i rispettivi sali identici a quelli, sopra descritti, ottenuti per doppio scambio dal sale di bario. Neutralizzata però con soluzioni di varî idrati (di sodio, di litio) non dette mai prodotti cristallini, ma solo, dopo lungo soggiorno nel vuoto secco, dei residui vischiosi e deliquescenti

Da quanto sopra ho esposto mi sembra bastantemente provata l'esistenza dell'acido monocloroplatinico $[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,H^2$.

Il modo con cui dal sale di bario, avuto direttamente, sono riuscito a preparare per doppio scambio i quattro sali di argento, tallio, piombo e mercurio, e ad isolare la soluzione dell'acido libero, le relative proprietà di questa, comprovano in maniera indubitata l'esistenza dell'anione complesso $[Pt\,Cl\,(OH)^5]''$ che si è trasportato sempre integro dall'uno all'altro dei varî composti ottenuti. L'acido monocloroplatinico può perciò mettersi a lato degli acidi pentacloroplatinico, tetracloroplatinico, bicloroplatinico, in quella serie di acidi che dall'esacloroplatinico $Pt\,Cl^6\,H^2$ arriva sino al platinico per sostituzione gra-

duale di ossidrili agli atomi di cloro di quello:

$$[Pt\,Cl^6]\,H^2$$
$$(^1)\quad [Pt\,Cl^5\,(OH)]\,H^2$$
$$(^2)\quad [Pt\,Cl^4\,(OH)^2]\,H^2$$
$$[Pt\,Cl^3\,(OH)^3]\,H^2$$
$$(^3)\quad [Pt\,Cl^2\,(OH)^4]\,H^2$$
$$[Pt\,Cl\,(OH)^5]\,H^2$$
$$[Pt\,(OH)^6]\,H^2$$

della quale serie, trascurando l'esacloroplatinico, conosciuto già da molto tempo, non rimane sconosciuto che il tricloroplatinico $[Pt\,Cl^3\,(OH)^3]\,H^2$ e poco determinato il platinico $[Pt\,(OH)^6]\,H^2$.

Chimica. — *Sulla non prevalenza dei sali potassici nella bile dei pesci marini* (4). Nota preliminare di C. U. Zanetti, presentata dal Socio Cannizzaro.

Già da tempo, occupandomi di alcuni argomenti di chimica fisiologica e scorrendone la letteratura, mi colpì il fatto che nella maggior parte dei trattati, sia recenti che vecchi di fisiologia e chimica fisiologica (5), sta scritto: « Gli acidi biliari si trovano combinati in generale con il sodio nella bile degli animali terrestri, mentre nei pesci marini questi acidi sono combinati quasi esclusivamente al potassio ».

La mia meraviglia non deriva tanto dal fatto della prevalenza del potassio, il che poteva essere, visto che essa è riportata da un autore all'altro nella letteratura da me consultata e che abbraccia circa mezzo secolo, prevalenza quindi da tutti finora ammessa od accettata; ma dall'altro fatto che non potei riscontrare alcun lavoro o capitolo nelle opere esaminate, il quale accennasse essere stati eseguiti studî, per vedere quale fosse la ragione di questa specie di elettività per il potassio da parte dell'apparato biliare di animali, che vivono in un mezzo dove il potassio si trova in piccolissima quantità, mentre prevale fortemente il sodio (6); elettività che a mio avviso

(1) Miolati e Bellucci, Gazz. chim. italiana, *XXX* (II), 565.

(2) Miolati, Zeitschr. f. anorg. Chemie, *XXII*, 445.

(3) Miolati e Pendini (di imminente pubblicazione).

(4) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Catania.

(5) Bottazzi, 1991; Hammarsten, Hoffmeister, Neumeister, Wurtz, Bunge, Selmi Enciclopedia, 1869.

(6) Usiglio (Enciclopedia chimica del Selmi, vol. I, pag. 241), fornisce i seguenti dati per l'acqua del Mediterraneo: in 1000 parti cloruro di sodio gr. 29,442; cloruro di potassio gr. 0,505.

presentava non scarso interesse nel campo della biologia e della biochimica.

Tale lacuna, il non aver veduto in alcuno dei trattati, che pure mettono in rilievo tale particolarità, riportati dati numerici sulle quantità di sodio e potassio contenute nella bile dei pesci marini, ed infine, tenendo conto del fatto ormai stabilito, che nella bile umana la quantità di sodio si mantiene pressochè costante, mentre quella del potassio si può variare per l'aggiunta di sali potassici con gli alimenti, mi fecero dubitare sulla esattezza di quanto finora si è affermato, e stimai prezzo dell'opera fare delle analisi quantitative sul contenuto di sali sodici e potassici nella bile dei pesci marini, le quali determinazioni o avrebbero confermato il fatto di cui mi pareva interessante studiarne il perchè, ovvero mi avrebbero permesso, come a me sembrava più probabile, di togliere un errore che da tanto tempo si perpetuava.

L'essere a Catania e nella opportunità quindi di procurarmi fresco il materiale occorrente, mi determinò a trattare questo argomento, ma soltanto in questo autunno mi trovai in condizioni di tempo e di mezzi per occuparmene; nella presente breve Nota preliminare espongo i primi risultati ottenuti, i quali però sono sufficienti a far vedere che non erravo dubitando della prevalenza del potassio nella bile dei pesci marini.

Le esperienze si riferiscono al liquido biliare contenuto nelle cistifele fresche di alcuni pesci di mare venuti sul mercato di Catania.

Le analisi furono fatte sul residuo proveniente dallo incenerimento della bile dalla quale prima veniva separata la sostanza mucoide coll'acido acetico; quindi l'albumina per coagulazione, e ciò per eliminare la maggior parte delle sostanze proteiche che rende sempre difficile la calcinazione. Per brevità non descrivo in esteso il metodo analitico eseguito, dirò solo che dal residuo fisso, tolta la silice nel modo ordinario, vennero eliminate le basi pesanti, quelle terrose, alcalino terrose per mezzo dell'idrato di bario in eccesso, il quale nel contempo toglieva alla soluzione leggermente cloridrica i solfati ed i fosfati; l'eccesso di barite venne tolto per azione dell'acido carbonico in presenza di ammoniaca, così da trasformare in carbonato quel bario che era passato nella soluzione allo stato di sale solubile, ed infine eliminando per arroventamento tutti i sali ammoniacali. La determinazione dei sali alcalini e separazione venne fatta per mezzo del cloruro di platino; il sodio venne determinato sia per differenza, sia pesandolo sotto forma di cloruro, togliendo il platino dalla soluzione dalla quale era stato separato il cloroplatinato potassico.

I seguenti valori si riferiscono alla percentuale di ossidi alcalini contenuti nella cenere proveniente dalla calcinazione del liquido biliare *in toto* contenuto nella cistifele.

(Al nome scientifico del pesce faccio seguire quello in uso sul mercato di Catania).

	Ossido di sodio	Ossido di potassio
Xiphias gladius (Pesce spada). . .	47,52	4,56
Orcynus thynnus (Tonno)	48,64	3,22
Polyprion cernium (Addotto) . . .	45,14	6,60
Cerna gigas (Cirenga)	46,19	4,48

A maggior conferma dei risultati ottenuti ho voluto anche analizzare la cosidetta bile cristallizzata di Platner preparata, tanto dal liquido biliare del pesce spada che del tonno, seguendo il metodo indicato nell'Hammarsten; in quantochè, essendo come si sa questa bile cristallizzata costituita principalmente dal miscuglio dei sali alcalini degli acidi biliari, operavo con un materiale meno ricco di altri sali minerali.

Bile cristallizzata in 100 p. . . .	Na_2O	K_2O
Pesce spada	49,29	13,42
Tonno	42,78	12,63

Da queste determinazioni risulta quindi: che nella bile dei pesci di mare da me analizzata non si riscontra la prevalenza del potassio sul sodio, bensì il contrario. Altre determinazioni e l'analisi completa della bile del pesce spada affidai al laureando sig. Melfi, e delle ricerche e descrizione dei metodi seguiti nei varî processi di separazione, accennati anche nella presente Nota, sarà dettagliatamente fatta presto la pubblicazione nella Gazzetta chimica italiana; ed in allora spero poter anche citare la fonte di quelle prime notizie che, riportate dai varî autori, ci condussero tutti a ritenere che i sali degli acidi biliari nei pesci marini contenessero prevalentemente il potassio, notizia che secondo quanto è riferito nel vol. III della Enciclopedia del Selmi 1869, pag. 160, è attribuita a Bensch e Strecher, ma che fino ad ora non potei controllare nei lavori originali di questi autori per deficienza momentanea di mezzi bibliografici nell'Istituto da me diretto.

Fisiologia. — *Esperienze sull' anestesia del labirinto dell' orecchio nei pesci cani (Scyllium catulus).* Nota del prof. G. Gaglio, presentata dal Socio Luciani.

Si è discusso infino agli ultimi tempi, riguardo ai disturbi di movimento, che seguono al taglio dei canali semicircolari dell'orecchio, su di un punto fondamentale, se essi, cioè, siano da considerare, come un effetto della eccitazione del canale leso o come conseguenza della soppressa funzione del canale. Alle buone ragioni, che hanno sostenuto l'opinione che veramente si tratti di deficienza funzionale, io ho aggiunto il fatto, che la semplice anestesia dei canali, praticata nei colombi con l'applicazione di una soluzione di cocaina,

determina precisamente gl' identici disturbi, che si hanno in seguito alla distruzione del canale, e in una maniera temporanea, in rapporto all' azione fugace della cocaina (1).

Il metodo, che diede così buoni risultati, in quanto che ha permesso lo studio delle funzioni dei canali semicircolari, arrecando una minima lesione anatomica, meritava di essere esteso allo studio del labirinto uditivo di altri animali.

Ho così rivolto l' attenzione sui pesci cani, che sono stati oggetto di molte esperienze e discussioni da parte di Steiner, Loeb, Bethe ed altri.

Lo Steiner ha eseguito ricerche (2) sui canali semicircolari dei pesci cani, venendo alla conclusione, che si possono in questi animali distruggere largamente i canali semicircolari, senza che si veda comparire alcun disturbo di movimento, a meno che la lesione non sia complicata da una lacerazione del midollo allungato. Nel suo *Trattato di Fisiologia*, lo Steiner, poi, dice che nei pesci, specialmente nei pesci cani, si possono asportare i canali semicircolari, in modo che compaiano o no disturbi di movimento, secondo quello che si vuole. Quando si provocano disturbi di movimento, egli aggiunge, è il centro di origine del nervo acustico che viene leso, e queste lesioni producono una forma di disturbi perfettamente eguale a quella che si ha per asportazione dei canali semicircolari. Anche Tomaszewics e Kiesselbach hanno affermato, come la distruzione dei canali semicircolari nei pesci non determini disturbi di equilibrio.

Ma questi risultati non sono stati accettati, avendo essi trascurato di considerare le posizioni e i movimenti compensatorî, che sono conseguenza delle lesioni dell' orecchio interno (Mach e Breuer, Loeb).

D' altra parte (Loeb, Bethe) fu dimostrato, che il taglio degli acustici nei pesci cani, senza lesione alcuna del midollo allungato, dà luogo ai caratteristici cambiamenti di posizione e di movimenti.

Certamente i disturbi motorî, che presentano i pesci cani, in seguito alle lesioni dell' organo uditivo, non sono così intensi, come quelli che si osservano per gli organi analoghi dei piccioni, e possono sfuggire ad una osservazione superficiale. Ho cominciato, infatti, col fare larghe esportazioni del labirinto uditivo nei pesci cani e la prima impressione è stata veramente quella di sorpresa, nel vedere questi animali, rimessi nelle vasche, nuotare discretamente; ma presto notai, come l' animale per lesioni unilaterali inclinasse più da un lato e tenesse le pinne pettorali inegualmente espanse e nel muoversi facesse giri più o meno larghi di maneggio, come se ineguale fosse la forza di contrazione dei muscoli dei due lati del corpo. L' animale

(1) G. Gaglio, *Esperienze sulla anestesia dei canali semicircolari dell'orecchio.* Archivio per le Scienze mediche, vol. XXIII, n. 3.

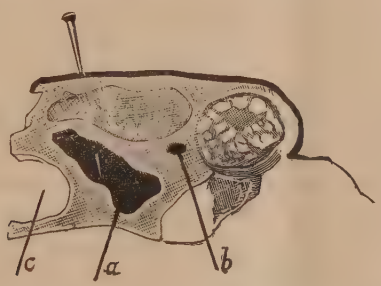
(2) Steiner, *Die functionen des Central-nervensystem*, ecc. Braünschweig, 1888.

mostrava, inoltre, in seguito alle mutilazioni, un pronunziato e duraturo abattimento generale.

A distinguere quanta parte di questi disordini spettasse alla mancanza dell'organo asportato, quanta a possibili irritazioni operatorie, doveva prestarsi bene l'applicazione locale della cocaina, capace di rivelare, mercè l'anestesia locale, i soli fatti di deficienza funzionale.

Il labirinto uditivo dello *Scyllium catulus* si presta assai bene per le applicazioni locali di cocaina, essendo ampio e di facile accesso. Esso risulta di una cavità (utricolo) entro la quale sboccano le ampolle dei tre canali semicircolari; ho pensato, quindi, di instillare dentro di essa qualche goccia di soluzione di cloridrato di cocaina. L'operazione è riuscita nel miglior modo ad animale integro, penetrando con la punta di un ago di Pravaz attraverso la cute e la parete cartilaginea del cranio direttamente entro la cavità dell'utricolo.

Mi fu facile orientarmi sul punto preciso, nel quale penetrare: ho tirato una linea ideale sulla superficie del cranio dall'avanti all'indietro, in modo da dividere la testa in due parti eguali, destra e sinistra, e un'altra linea perpendicolare alla prima, che andava da un forame branchiale all'altro; è dal punto di incrocio delle due linee, che dovevo muovere, andando in linea retta verso il forame branchiale e fermandomi press'a poco ad un terzo della distanza, per essere sicuro, che l'ago, infitto perpendicolarmente, penetrasse nel centro della cavità dell'utricolo.



Nei comuni esemplari dello *Scyllium catulus* di kg. uno di peso, questo punto era alla distanza di un cm. dal punto di incrocio delle linee descritte. Del resto, una volta passato con la punta dell'ago attraverso la parete del cranio, si sentiva dalla mancata resistenza di essere penetrati nella cavità, e quando non se ne era bene sicuri, vi si riusciva, inclinando opportunamente l'ago.

La figura qui sopra mostra uno spaccato, a grandezza naturale, della regione otica, come risulta per un taglio della testa, praticato lungo la linea da un forame branchiale all'altro; essa rappresenta la parte posteriore della metà destra della testa così tagliata. Si vede bene come ampio sia l'utricolo (*a*) e come facile ne sia l'accesso dall'esterno, segnato dallo spillo infitto;

b corrisponde alla sezione del canale orizzontale, esterno; *c* alla cavità cranica.

Per mezzo di iniezioni di liquido colorato con inchiostro di China o fucsina ho visto, che iniettando entro la cavità dell'utricolo 4-5 gocce di liquido, questo si diffondeva nell'utricolo e nei canali semicircolari, che ne rimanevano colorati. Il pericolo, che il liquido attraverso la via del nervo acustico potesse penetrare entro del cranio, non si mostrò fondato, poichè anche iniettandone quantità maggiore, non fu vista colorazione alcuna della parete interna del cranio e dell'encefalo. Ho anche iniettato a più riprese molte gocce di mercurio entro l'utricolo, senza che abbia mai constatato passaggio di mercurio entro la cavità cranica.

Per essere, talvolta sicuro, dell'azione localizzata della cocaina, ho aggiunto alla soluzione di essa una sostanza colorante e dopo l'esperienza, ucciso l'animale, ho verificato come essa si fosse diffusa solamente entro l'àmbito del labirinto.

Riferisco alcune esperienze:

I. 7 agosto. Grosso *Scyllium catulus* del peso di kg. 1,400.

Ore 9.20. Si toglie il pesce cane dalla vasca, e mentre un aiuto tiene ferma la testa su di un tavolo, inietto entro il labirinto uditivo, a sinistra, 3-4 gocce di una soluzione di cloridrato di cocaina 5 %, colorata con una goccia di inchiostro di China; l'operazione dura meno di un minuto. Rimesso rapidamente l'animale nella vasca, questo fa subito movimenti disordinati, che debbono in gran parte riferirsi alla reazione dell'animale per la violenza patita. Presto l'animale si calma e dopo 10-15 minuti si osserva, che esso nel nuotare affonda di più nell'acqua il lato sinistro; anche quando riposa al fondo della vasca, si osserva, che l'animale sta inclinato, poggiando di più verso il lato sinistro.

Nell'animale in riposo si osserva, che la posizione delle pinne pettorali non è simmetrica, quella sinistra più abbassata e meno espansa è in contatto col suolo, la destra è più sollevata e tocca appena col suo margine il suolo o non lo tocca affatto.

Eccitando l'animale per mezzo di lunghe pinze di legno a muoversi, esso nuota, inclinato verso il lato sinistro e si volta sempre da sinistra verso destra; esso, cioè, fa giri di maneggio più o meno larghi e sempre nel senso da sinistra verso destra. Costringendo l'animale per mezzo delle pinze di legno a voltarsi in senso opposto, esso vi riesce con difficoltà eseguendo movimenti disordinati e ripiglia subito la sua direzione verso destra.

Questi disturbi sono durati distintamente per un'ora e mezza, quindi cominciarono ad attenuarsi; osservato l'animale alle ore 15, appariva normale per la sua posizione di equilibrio simmetrica e per i giri che faceva nell'acqua, voltandosi indifferentemente ora verso destra, ora verso sinistra.

Ucciso l'animale, furono trovati colorati in nero dall'inchiostro di China tutto l'utricolo e in gran parte i canali semicircolari; nessuna traccia di coloramento nero fu riscontrata entro il cranio.

II. 9 agosto. *Scyllium catulus*, peso kg. 1,200.

Ore 14.25. Iniezione nel labirinto destro di poche gocce di soluzione di cocaina 5 %, colorata con un po' di fucsina.

Ore 14.33. L'animale nuota, inclinandosi verso il lato destro; quando sta in riposo sul fondo della vasca, poggia inclinato sul fianco destro, con la pinna pettorale destra abbassata, quella sinistra più dilatata e sollevata dal suolo.

Eccitato, nuota voltandosi sempre verso sinistra, fa, cioè, giri di maneggio da destra verso sinistra. Non si riesce, presentandogli degli ostacoli per mezzo di lunghe pinze di legno, a farlo girare in senso opposto, verso destra.

Nel nuotare muove con prevalenza la pinna pettorale sinistra.

Ore 15.10-15.30. Persistono i disturbi.

Ore 16.30. I disordini di equilibrio e di locomozione sono attenuati, ma persiste la tendenza a fare giri di maneggio verso sinistra.

Alla dimane l'animale appare perfettamente normale.

Questo animale servì per altre ricerche, ma quando esso morì, due giorni dopo la prima esperienza, furono trovati colorati dalla fucsina l'utricolo e i canali semicircolari del labirinto destro, nessuna traccia di coloramento entro la cavità del cranio.

III. 16 agosto. Grosso *Scyllium catulus*.

Ore 10. Si iniettano nel labirinto destro 2-3 gocce della soluzione di cocaina. Dopo 5 minuti l'animale inclina sul fianco destro e fa giri di maneggio verso sinistra; si toglie dalla vasca e si iniettano nel labirinto sinistro 2-3 gocce della stessa soluzione di cocaina.

Immediatamente dopo l'iniezione, rimesso l'animale nella vasca, compie rapidi movimenti di rotazione attorno l'asse longitudinale del corpo e nuota in posizione verticale, colla testa fuori l'acqua.

Calmatisi dopo uno o due minuti questi movimenti disordinati, l'animale nuota barcollando, oscilla, cioè, ora un po' verso il lato destro, ora un po' verso quello sinistro; non fa più giri di maneggio, voltandosi ora a destra, ora a sinistra.

Appare molto prostrato di forze e offre poca resistenza, quando lo si prende con le mani. Se per mezzo delle pinze di legno si mette l'animale a giacere su di un fianco o sul dorso, esso resta per qualche minuto in questa posizione anormale.

Dopo un'ora i disturbi persistono, ma appaiono un po' diminuiti.

Nelle ore pomeridiane l'animale sembra rimesso, ma non del tutto, mostrandosi ancora un po' abbattuto. Lo stesso stato presentava all'indomani; ucciso, fu riscontrata una lieve emorragia nel labirinto, così a destra, come a sinistra.

Queste esperienze dimostrano, che i disturbi motorî, che si osservano nei pesci cani in seguito alle instillazioni di cocaina entro il labirinto uditivo, sono fondamentalmente gli stessi di quelli che seguono alle mutilazioni del labirinto e al taglio del nervo acustico. Una differenza può essere notata nei risultati per quello che riguarda la direzione dei giri di maneggio, che il Loeb [1] in seguito al taglio dell'acustico vide seguire costante verso il lato del nervo leso, mentre in seguito alle instillazioni labirintiche di cocaina i giri di maneggio si fanno di regola verso il lato normale. Tuttavia anch'io ho osservato una volta, e veramente in seguito ad instillazioni entro il labirinto di una soluzione molto concentrata di cocaina (10 %) farsi giri di maneggio verso il lato operato.

Secondo Bethe [2] in seguito al taglio dell'acustico nei pesci cani, non si hanno risultati costanti riguardo alla comparsa e alla direzione dei giri di maneggio, ma sul proposito debbo fare osservare, che i giri di maneggio

(1) Loeb, *Ueber den Antheil des Hörnerven an den nach Gehirnverletzung auftretenden Zwangsbewegungen* ecc. Pflüger's Archiv, Bd. 50, 1891.

(2) Bethe, *Die Locomotion des Haifisches* ecc. Pflüger's Archiv, Bd. 76, 1899.

sono talvolta molto larghi e possono sfuggire ad una osservazione superficiale; l'animale, per esempio, che si trova in una vasca discretamente grande, della lunghezza di 2 metri, riesce a dirigersi nel nuoto da un'estremità all'altra della vasca e il maneggio non è allora rivelato, che dal voltarsi che fa sempre da un lato, quando esso torna indietro, e dalla difficoltà che si prova quando si vuole costringerlo a voltarsi dal lato opposto. Debbo inoltre notare, che il Loeb e il Bethe hanno fatto le loro esperienze sullo *Scyllium canicula*, mentre io ho tentato le prime esperienze su questo animale e poi ho dovuto limitarle allo *Scyllium catulus* o gattuccio di mare, che è di mole assai più grande e che mi offriva il vantaggio di avere una regione otica estesa ed un utricolo ben capace. Sono le esperienze su questo animale che mi hanno convinto di avere raggiunto un'azione ben localizzata nelle instillazioni labirintiche di cocaina.

Ad ogni modo, ciò che risulta fuori di ogni dubbio è, che i disordini motorî, che seguono nei pesci cani al taglio dell'acustico, alle asportazioni del labirinto o alle instillazioni di cocaina entro il labirinto, sono della stessa natura ed essenzialmenle dovuti alla mancanza dell'organo o alla deficienza funzionale di esso e non ad irritazioni operatorie.

Io non nego, che anche le eccitazioni dirette dei canali semicircolari, come il Breuer (1) specialmente ha dimostrato nei piccioni, possano dar luogo a movimenti ben determinati e caratteristici, benchè debba osservare, che, trattandosi di organi delicatissimi, una irritazione, che passi certi limiti, deve equivalere alla distruzione funzionale dell'organo. È quello che ho dovuto tenere presente, quando per via di controllo e di completamento delle mie ricerche, ho iniettato entro il labirinto dei pesci cani sostanze diverse.

Premetto anzi tutto, che l'iniezione di poche gocce di liquido indifferente, come acqua di mare sterilizzata, entro il labirinto dei pesci cani, non diede luogo a manifestazioni motorie di sorta; inefficace si mostrò anche l'instillazione di poche gocce di una soluzione di cloruro di sodio al 5%, e quando ho pensato di iniettare soluzioni saline di più alta concentrazione, sorse subito il dubbio, se con questi mezzi realmente avrei eccitato o non invece distrutto le espansioni nervose dell'acustico.

Più adatto mi parve ad esercitare un'eccitazione meccanica il mercurio metallico, come quello che suddividendosi in goccioline minutissime e pesanti, avrebbe potuto avere un'azione analoga a quella degli otoliti. Queste esperienze ho ripetuto parecchie volte, iniettando entro il labirinto dei pesci cani, ora di un lato, ora di tutti e due i lati, ora poche gocce, ora molte gocce di mercurio, senza che abbia potuto osservare disordini motorî ben definiti; sicchè esse confermano pienamente il concetto fondamentale, che è la paralisi labirintica quella, che costantemente determina disturbi motorî.

(1) Breuer, *Neue Versuche an den Ohrbogengängen.* Pflüger's Archiv. Bd. 44, 1889.

Venendo ora alla interpretazione dei fatti osservati, se ci teniamo stretti alla immediata osservazione dei disturbi motorî, poichè in seguito alla instillazione della cocaina nel labirinto di un lato, l'animale affonda di più nell'acqua il lato dalla parte dove s' è fatta l' iniezione, e nel cambiare direzione, quando nuota, si volta sempre verso il lato opposto a quello iniettato, dobbiamo convenire, che l'animale si comporta, come se non fosse più simmetrica la forza muscolare dei due lati, e precisamente, come se fosse paretico il lato corrispondente a quello della praticata iniezione. L'animale, nel quale s' è iniettata cocaina in tutti e due i labirinti, non fa più giri di maneggio, ma barcolla nel muoversi, perchè la forza della contrazione muscolare è diminuita così nel lato destro, come in quello sinistro. Esso è così debole, che si lascia mettere a giacere nelle posizioni non naturali sul fianco o sul dorso e si lascia prendere con le mani e tirare fuori della vasca, dibattendosi appena. Questa debolezza muscolare, consecutiva alle instillazioni di cocaina entro il labirinto e che dura temporaneamente in rapporto all'azione temporanea della cocaina, mi pare veramente il fatto più importante delle lesioni labirintiche.

Per avere un' idea precisa di quanto diminuisse lo sforzo muscolare in seguito alle instillazioni di cocaina, ho pensato di praticare delle misure. Ho legato alla coda del pesce cane un lungo nastro, che dall'altro capo era in connessione con un apparecchio adatto a indicare lo sforzo, che il pesce, eccitato a muoversi, avrebbe spiegato. Per queste misure mi sono valso ordinariamente di una bilancetta a spirale, ma siccome essa non segnava che a quarti di chilogrammo, per misure più precise ho fatto passare il laccio, che ad uno estremo era legato alla coda del pesce, attraverso una carrucola e ho posto all'altro estremo un sacchetto con dei pesi; potevo così notare il peso, che il pesce era capace di sollevare, l'altezza a cui lo faceva arrivare e il peso massimo, che faceva equilibrio allo sforzo dell'animale.

Ho così trovato, che un pesce cane del peso di kg. 1,400, allo stato normale, segnava gr. 250-500 e qualche volta arrivava fino a gr. 1000. Dopo l' iniezione di poche gocce di cocaina nel labirinto di sinistra, il pesce segnava gr. 250 e non arrivava più che difficilmente a gr. 500. Dopo l' iniezione praticata anche a destra il limite massimo era indicato da gr. 250.

Un altro pesce del peso di kg. 1,800, allo stato normale, sollevava con facilità dei pesi di kg. 1-1,500 e qualche volta arrivava fino a kg. 2.

Dopo l' iniezione di cocaina nel labirinto di destra, esso non sollevava più che pesi di gr. 500-800 e, dopo l' iniezione praticata anche all'altro lato, innalzava solamente pesi di gr. 100-200, arrivando appena negli sforzi massimi a gr. 300.

Queste esperienze dimostrano, che dopo l' iniezione di cocaina entro il labirinto di un lato, la forza muscolare del pesce diminuisce della metà e anche più e, dopo l' iniezione bilaterale, essa scende ancora infino al quarto della forza primitiva e anche più sotto.

La diminuzione della forza di contrazione di determinate masse muscolari ci spiega in una maniera naturale i cambiamenti di posizione e i disturbi motorî che presentano i pesci cani in seguito alle lesioni labirintiche e fa apparire artificiose e ingombranti le ipotesi, che si sono agitate, della vertigine, del deficiente senso dello spazio o della alterata funzione geotropica. Già basta osservare, come precisi e costanti siano i cambiamenti motorî, che si determinano in seguito alla distruzione o all'anestesia del labirinto, per escludere quelle spiegazioni, che dovrebbero fondarsi su di una confusione di percezioni e di movimenti dell'animale. L'orientazione nello spazio, la funzione statica (geotropica, Loeb) più che l'espressione funzionale di un solo organo, appare, come la risultante della complessa coordinazione sensitiva e motoria, che ha luogo nei centri nervosi.

Le ricerche sui pesci cani ci conducono, quindi, a conclusioni analoghe a quelle, alle quali siamo pervenuti nelle ricerche sull'anestesia dei canali semicircolari dei colombi; esse hanno fondamento sul tono muscolare labirintico, illustrato specialmente dall' Ewald e che si può ritenere, come la sola funzione dei canali semicircolari finora ben dimostrata.

Il labirinto dell'orecchio regola per via riflessa il tono dei muscoli; dal labirinto, cioè, partono in una maniera continua eccitazioni sensitive, che ascendono verso i centri nervosi e si diffondono lungo i nervi motori rendendo possibile il normale funzionamento dei muscoli. Nei pesci questa funzione del labirinto appare isolata, mancando in essi la funzione acustica; pare, infatti, che i pesci, così come sono privi di coclea, siano del tutto privi del senso dell'udito. Nei colombi, l'Ewald vide, come anche la coclea abbia questa influenza riflessa sulla funzionalità dei muscoli, benchè in assai minor grado dei canali semicircolari. I colombi, infatti, nei quali si sono asportate tutte e due le coclee, se hanno una deambulazione normale, perdono però l'attitudine al volo, perdono, cioè, la forza di tenersi col movimento delle ali librati in aria.

Nè mancano altri esempî di questa influenza continua, leggermente eccitante, che da un organo di senso attraverso ai centri nervosi si trasmette ai nervi ed ai muscoli. Così il taglio delle radici posteriori spinali o l'anestesia di esse fatta per mezzo della cocaina, fa diminuire l'eccitabilità della corrispondente radice spinale anteriore. Dal ganglio intervertebrale passa, quindi, nella radice posteriore un'influenza eccitatrice lenta e continua, che attraverso le cellule del midollo spinale si riflette sulle radici anteriori.

In seguito al taglio delle radici posteriori spinali si svolgono, anche nelle cellule anteriori del midollo, distinte alterazioni istologiche, come Rossolimo, Oddi e Rossi e recentemente Warrington (1) hanno dimostrato.

(1) Warrington, *On the structural alterations observed in nervecells.* Journal of Physiology, vol. 23, 1898-99.

Queste osservazioni rivelano l'intima connessione funzionale fra il neurone sensitivo e il neurone motore, e riescono a renderci conto dei disturbi motori che seguono alle lesioni del labirinto uditivo; ma con ciò non riteniamo conosciuta tutta la funzione di esso, anzi abbiamo con una certa predilezione adoperato la parola *labirinto* per aver sempre presente, che esso rappresenta, davvero, fisiologicamente, un labirinto, che è ancora da distrigare.

Le ricerche, che ho riferito, sono state fatte nell'Istituto della Stazione Zoologica di Napoli, ove hanno pure sperimentato sui canali semicircolari dei pesci Steiner, Loeb, Bethe e tanti altri; al sig. Direttore dell'Istituto, che mi accolse con gentilezza e mi fu largo di aiuti, mi è caro rivolgere vivi ringraziamenti.

PERSONALE ACCADEMICO

Commemorazione del Socio prof. Riccardo Felici, letta dal Socio Ròiti nella seduta del 2 novembre 1902.

A commemorare degnamente Riccardo Felici davanti a Voi, illustri Colleghi, non v'ha dubbio che mi manca la sufficienza; ma non ho potuto declinare il mesto ufficio perchè troppo intensi e profondi sono i sentimenti di affettuosa venerazione, di gratitudine e di ammirazione che in me ridesta la memoria del grande estinto.

Lo conobbi sullo scorcio del 1864 quando andai studente a Pisa, d'onde è sgorgato sì largo fiume di sapienza e di virtù civiche ad irrigare e fecondare tutta Italia.

Il Mossotti era scomparso, ma il suo spirito aleggiava ancora sulla Facoltà di scienze, il Piria, che aveva avuto per assistente il Cannizzaro, era passato a Torino, il Matteucci se n'era pure allontanato, travolto dal turbinío politico. Dei veterani rimanevano il patriarcale Luigi Pacinotti, padre del nostro Collega, il quale stava maturando a Bologna la sua invenzione, germe di tante meraviglie scientifiche ed economiche, il Meneghini, i due Savi, e attorno a loro il Cuppari, l'Orosi, il Lavagna, il Martolini, Novi, Sbragia, Barsotti, Botto, ahimè tutti scomparsi! e su tutti primeggiavano il Betti ed il Felici, tanto diversi nelle forme esteriori e pure fratelli nella psiche. Il Beltrami passava per Pisa qual meteora luminosa. Stava per sorgere il Dini.

La scolaresca della Facoltà di scienze era diligente, seria, avida d'imparare e con preparazione migliore della media, perchè i concorsi della Scuola normale superiore richiamavano a Pisa dalle altre Università non pochi giovani fra i più promettenti. Ed il Felici si sarebbe trovato nell'ambiente più acconcio alle proprie doti, se questi scolari non fossero stati so-

prafatti per numero dagli altri di farmacia, d'agraria, di veterinaria e di medicina, che allora tutti insieme dovevano assistere alle lezioni di fisica, e che per un'aberrazione di noi Italiani si ritenevano allora, anche più d'oggi, come giustamente avversi alle matematiche.

Egli dunque, spinto irresistibilmente dall'indole sua e dall'onesta coscienza a dimostrare ed approfondire col più stretto rigore il nesso logico fra i varî fenomeni che andava descrivendo, si reputava obbligato a non usar punto le notazioni del calcolo come se fossero armi insidiose. E le sue dimostrazioni, frutto perciò di lunga meditazione e d'improba fatica, riuscivano interessanti, limpide e persuasive solo a chi avesse il talento di seguirle con la necessaria tensione della mente. Escogitava delle esperienze ingegnosissime per rendere palpabili nella scuola le relazioni fra le variabili d'un fenomeno: e rammenterò ad esempio quella di proiettare con un fascio di luce un pendolo oscillante al di sopra di un disco girevole con velocità costante attorno al proprio asse geometrico, per mostrare che la legge delle oscillazioni pendolari è quella stessa della proiezione del moto circolare uniforme sopra un diametro del circolo; e rammenterò pure l'altra esperienza di rendere visibile col metodo stroboscopico la curva d'oscillazione di una corda vibrante, rilevando che essa varia di forma insieme col timbro del suono reso, secondo che la corda viene pizzicata, od eccitata coll'archetto da violino, od in altro modo diverso.

Esperienze di tal genere il Felici montava in lezione per l'ottica, la elettricità, il calore: e naturalmente non riuscivano tutte di primo acchito; ma quando fallivano, egli le rendeva ancor più istruttive denunciando i motivi dell'insuccesso. Aborriva dai facili sotterfugi che davanti all'uditorio producono sicuramente l'apparenza dell'effetto cercato e lo mostrano cospicuo più del vero, tanto da strappare gli applausi: anzi si asteneva perfino di dare vistosità alle esperienze sincere. So che questo era un suo proposito deliberato, ma non so dire se provenisse da religioso rispetto per l'austerità della scienza cui forse egli avrebbe temuto di mancare ricorrendo ad effetti teatrali di dubbia efficacia didattica, o pure se fosse naturale conseguenza del suo fare dimesso, del ritegno che aveva di porsi in luce, della pena che provava quand'era notato.

Il Felici, nato a Parma l'11 giugno 1819, aveva allora quarantacinque anni, faceva lezione da poco meno d'un ventennio, prima aiuto e supplente del Matteucci, poi professore aggregato, e co' suoi colleghi che si chiamavano Piria, Luigi Pacinotti, Burci, Ferrucci, Ranzi, Vaccà, Giorgini, Pilla, Martolini, Sbragia, Tassi, Marcacci e Tigri, aveva marciato da tenente nel generoso battaglione universitario guidato dal Mossotti, aveva preso parte alla eroica lotta di Curtatone, ove il Montanelli vide ferito ed il Pilla morente; era professore ordinario da cinque anni, avendo già pubblicato alcuni dei lavori che dovevano lasciare tanta orma nella scienza. E nella sua modestia

gli pareva un sogno che la cieca fortuna lo avesse portato tant' alto da farlo padrone d' una reggia qual era a' suoi occhi l' istituto fisico di Pisa allor così angusto e povero, ma in grazia sua così lindo, con annessa la casuccia ancor più angusta ed umile, ma abbellita dal sorriso dell' unica figliuoletta Isabella e dall' attento amore della impareggiabile sua consorte, signora Elisa Frullini.

Io ebbi la rara ventura d' essere accolto in quella casuccia, di poter muovermi liberamente in quel laboratorio e d' aver commercio quotidiano con quell' anima eletta; e giunto oramai all' età nella quale si vive di memorie, trovo un ristoro dolcissimo a quel sereno spettacolo di virtù domestiche, di gioie intellettuali, di felicità perfetta.

Il Felici era gioviale, arguto, piacevole nel conversare, e la fine ironia ed il pungente sarcasmo delle sue barzelette facevano il più singolare contrasto coi sentimenti benevoli e delicati che lo guidavano in ogni suo atto. Non incoraggiava i giovani con blandizie e nutrendoli di speranze, li spronava con epigrammi ed insieme li ammoniva con precetti più o meno giocosi: « Giovinotto, giovinotto!, mi diceva, rifletta che ogni idea nuova è « novantanove volte su cento uno sproposito da prendersi con le molle. Se « le viene, la combatta prima di buttarla fuori! ».

Bonarietà e pessimismo, umiltà ed acume critico fusi insieme, formavano il fondo del suo carattere mite ed equilibrato. Severo più con sè che con gli altri, diffidava delle proprie scoperte, non ne parlava mai: e le cautele nello sperimentare, gli scrupoli nell' asserire non gli parevano mai soverchi, così che può sorgere il dubbio se la perfezione di quanto ha pubblicato compensi la perdita che la scienza ha patito dal suo riserbo.

Pare incredibile, ma solamente in questi ultimi giorni sono venuto a scoprire alcuni suoi lavori: fra gli altri uno sulla termoelettricità del mercurio, col quale metteva in evidenza sino dal 1846 come la semplice variazione di temperatura da punto a punto di un conduttore, il cui assetto molecolare non possa modificarsi, non basti a destarvi la corrente elettrica.

Un' altra sua Memoria, che mi era sfuggita e che non trovo citata in nessun luogo e che pure indurrebbe a stabilire fatti non ammessi generalmente, ha la data del 1851 e tratta *delle polarità galvaniche secondarie e dell' influenza esercitata dal calore sulla propagazione della corrente elettrica nei liquidi*. In essa bisogna ammirare gli accorgimenti sottili mercè i quali il Felici ha saputo far rispondere degli apparecchi primitivi a questioni che tuttora rimangono incerte, malgrado la raffinatezza strumentale raggiunta con mezzo secolo di febbrile lavoro. Il Felici vi determinava, insieme con altro, come dipenda la forza elettromotrice di polarizzazione galvanica dalla intensità della corrente, ed i suoi numeri s' acconciano abbastanza bene nella formola empirica suggerita dal Crova molto più tardi. Stabiliva inoltre come varia la conduttività elettrica dell' acqua al crescere

della temperatura partendo da sotto zero, ed accennava ad un minimo corrispondente al massimo di densità. Questo fatto, malgrado l'affermativa recente del prof. Lussana, corroborata indirettamente dalle determinazioni di viscosità fatte dal compianto dottor Pacher, rimane ancora molto incerto avendo contrario il nostro illustre collega Kohlrausch, la più grande autorità che si conosca in simil genere di ricerche; ma io confido che, di fronte al nome del Felici, il Kohlrausch stesso, od altri per lui, possa riprendere in esame la questione.

A Pisa, già nel 1847, quasi contemporaneamente col Kirchhoff, e prima che questi ne avesse poste le equazioni generali, il problema della distribuzione delle correnti elettriche nei corpi a tre dimensioni era stato attaccato dal senatore Luigi Ridolfi, allor giovinetto, e discusso dal Felici, il quale poco di poi lo risolse pienamente pel caso della sfera, ricavandone alcuni interessanti teoremi accessibili alla verificazione sperimentale.

Se questi lavori del Felici rimasero più o meno ignorati insieme con altri che io sono andato rintracciando per presentarvene una lista, non toccò ugual sorte alle sue indagini intorno alla induzione elettrodinamica.

Egli, a differenza di Weber e Neumann che avevano preso le mosse da dati ipotetici, s'era prefisso di ricercare la legge fondamentale dell'importantissimo fenomeno appoggiandosi unicamente a fatti bene accertati: e, seguendo i classici procedimenti di Ampère nello studio delle azioni ponderomotrici fra correnti elettriche, seppe ideare e mandar ad effetto delle esperienze ammirabili per eleganza e semplicità, dalle quali trasse una espressione matematica della forza elettromotrice indotta in un elemento conduttore da un elemento di corrente, sia pel moto relativo, sia per le variazioni di essa corrente primaria, ed anche per lo spostamento d'una parte del conduttore indotto rispetto alla rimanente.

La formola del Felici non coincide nè con quella del Weber, nè con l'altra del Neumann; ma dopo una lunga discussione contenuta in gran numero di Memorie interessantissime che il tempo mi vieta di analizzare davanti a Voi, illustri Colleghi, e dopo aver sottoposto alla prova dello sperimento i più varî casi escogitati pro e contro, si arrivò a conchiudere che tutte e tre le formule, convenientemente applicate, si trovano in pieno accordo coi fatti osservabili. Ciò è naturale per la prima, poichè ricavata con rigor logico da esperienze ineccepibili senza il soccorso d'alcun che d'arbitrario: e se pur le altre dànno risultati conformi alla realtà, la ragione è che le premesse arbitrarie v'introducono dei termini i quali svaniscono quando esse si applichino a correnti guidate da circuiti chiusi. Finora non si è sperimentato nessun caso di correnti aperte, e quando, come ogni indizio porta a ritenere, sia conforme al vero il concetto di Maxwell che anche pei conduttori non rientranti in se stessi, il circuito si chiuda pel dielettrico interposto; dovremo dire che la controversia già

antica non potrà esser composta mai, come cosa riguardante un'astrazione che non trova riscontro in Natura.

Spetta però al Felici il merito altissimo, e da tutti riconosciuto, d'aver dato un'espressione matematica dell'induzione con una base inconcussa che sfida qualunque mutar d'imagini ci preparino le più fervide fantasie volte a descrivere i fenomeni naturali (1).

Egli la propria imaginazione la tiene a freno: e se il freno talvolta rallenta, è sollecito a farselo perdonare con una ingenuità che desta il sorriso. Così, per tentare una teoria che derivi il diamagnetismo dall'induzione, premette che non intende menomamente di risolvere un problema destinato ad essere agitato fra i fisici per molto tempo ancora, che sarebbe assai meglio non ricorrere ad alcuna ipotesi sullo stato molecolare dei corpi; ma che, non potendo di necessità esimersene, essa sia almeno chiaramente concepibile come quella, per quanto arrischiata, di ridurre a proporzioni infinitamente piccole un fatto ben conosciuto e studiato sperimentalmente in tutte le sue particolarità e con ogni esattezza sui corpi di dimensioni finite, per supporne poi l'esistenza nelle ultime particelle materiali.

Quindi, avendo dedotto matematicamente dalla sua formula dell'induzione che in una sfera conduttrice rotante di fronte ad una calamita si devono destare delle correnti indotte per cui essa tenderà ad avvicinarsele o ad allontanarsene secondo che la rotazione avviene in un verso o nell'altro; ed avendo riscontrato con paziente cura che, a parità di tutte le altre circostanze, la seconda azione è più intensa della prima, ne deduce a buon dritto che riescono in tal modo semplicemente interpretabili tutti i fenomeni sino allora conosciuti del diamagnetismo.

Ma sorriderebbe lui, l'uomo superiore, compiacendosi della propria circospezione, se potesse leggere l'ultimo discorso inaugurale dell'Associazione britannica, dove il prof. Dewar riferisce che, alle temperature bassissime otte-

(1) Il Maxwell, negli art. 536 a 539 del suo celebre Trattato (Oxford, 1873) riporta con lode le esperienze del Felici; ma poi all'art. 542 dice: *We may regard J. Neumann* (dalle citazioni si scorge che si riferiva invece a F. E. Neumann), *therefore, as having completed for the induction of currents the mathematical treatment which Ampère had applied to their mechanical action.*

Questa inesattezza sfuggita al grande Inglese, che in apparenza defrauda il Felici, non è impossibile che derivi da una parola usata dal Felici stesso! Infatti scopro che questi nella sua Rivista di lavori esteri sulla elettrodinamica (N. Cimento XIX, 205) aveva detto dieci anni prima: *Il Neumann poi completò, ipoteticamente, quella legge* (di Lenz, determinante la direzione delle correnti indotte) *per ciò che riguarda la intensità dell'induzione. Nulladimeno, come è noto, la precedente espressione algebrica....* (la formula di Neumann applicata a circuiti chiusi) *coincide esattamente con quella da me ottenuta, seguendo per la* SUA RICERCA (*per la* RICERCA DI ESSA, che avrebbe impedito, anche ad un lettore straniero, di cadere in equivoco) *un modo affatto sperimentale, e simile a quello di Ampère nella sua teoria dei fenomeni elettrodinamici.*

nibili mercè la liquefazione dell'aria o dell'idrogeno, il diamagnetismo del bismuto aumenta malgrado la diminuita forza viva interna, e ci rivela così che è condizionato non tanto dal moto quanto dall'assetto molecolare.

Il Felici apparteneva con Helmholtz, per fare qualche nome, Beltrami, Poincaré, Volterra qui presente, a quella schiera eletta la quale sa appagarsi della espressione matematica dei fenomeni senza sentire il bisogno nè l'utilità di foggiarsene alcun modello meccanico, come predilige la scuola inglese e con essa la grande maggioranza dei fisici moderni.

Questa predilezione muove dalla mente di Faraday che, priva del fine magistero del calcolo, arrivò a surrogarlo con vivide pitture, e si figurò i fenomeni elettrici e magnetici come dovuti a forze che si trasmettono da punto a punto dei varî mezzi dotati di peculiari elasticità: e Maxwell, dando più tardi veste matematica al quadro, fomentò siffatta predilezione. Ma nessuno ignora più oggi che i fatti studiati sperimentalmente, per ciò che sono fedelmente espressi dalle formole, non possono decider nulla in favore della rappresentazione faradaica o piuttosto delle azioni a distanza tanto fecondate dall'ingegno di La Place, Poisson, Plana, Mossotti.

Cinquant'anni fa la grande maggioranza dei fisici non aveva idee così chiare, ed è notevole come il Felici colle sue *Osservazioni sopra l'interpretazione di alcune esperienze* (allora) *moderne di elettrostatica*, ammonisse coloro che si perdevano in vani conati, e li esortasse ad approfondire maggiormente la teoria che da altri cinquant'anni era incontrastabilmente stabilita, senza che c'entrassero ipotesi, sopra un fatto accertato sperimentalmente con tutta l'esattezza desiderabile (che cioè l'elettrico si porta per intero alla superficie dei conduttori), di guisa che imbattendoci in esperienze che ci sembrino contradirla, dobbiamo conchiudere che esse furono male eseguite, o che noi non sappiamo analizzarle.

Le imagini che guidavano Faraday alle sue eccelse scoperte, se avevano per lui contorni ben delineati, bisogna convenire che chiunque altro, a leggerne la descrizione, doveva vederle annebbiate: e mentre il Maxwell era intento a dissipare matematicamente le nebbie, il Felici, sempre in sospetto d'ogni creazione soggettiva, s'accingeva a scrutare se veramente si potesse attribuire alle sostanze isolanti una parte attiva nella trasmissione delle forze elettriche. Le sue ricerche intorno all'*azione dei corpi non conduttori soggetti alla influenza d'un corpo elettrizzato* lo occuparono dal 1865 al 1871 con un'assiduità, una pertinacia, una precisione di cui nessuno può farsi idea adeguata senz'esserne stato testimonio oculare, e gli permisero di fornire con piena sicurezza degl'importanti dati di fatto che ebbero il plauso universale.

A dir vero, non furono da lui giudicati ancora bastevoli a vincere la sua riluttanza; ma non di meno costituiscono il primo fondameuto sperimentale per cui oggidì la teoria del Faraday può emulare con probabilità di vittoria l'antica teoria delle azioni a distanza.

Ora dovrei intrattenervi sulla scoperta fatta dal Felici che un coibente in moto trascina seco un corpo elettrizzato il quale gli stia di fronte, accennandoci come la polarizzazione dielettrica non sia rigorosamente istantanea; dovrei parlarvi del suo metodo originale per determinare quanto duri la scarica elettrica nelle varie circostanze, e quanto tempo impieghi a propagarsi lungo un filo conduttore; dovrei rammentare il prezioso strumento ch'egli ci ha dato, facendolo costruire al suo bravo meccanico il compianto Mariano Pierucci, per seguire ad ogni ventimillesimo di secondo lo svolgimento d'un fenomeno, e narrare le determinazioni interessantissime che con questo interruttore delle correnti elettriche furono eseguite da lui, dai suoi allievi Donati e Poloni, e dall'altro suo allievo Adolfo Bartoli sì presto rapito alla scienza che Voi non poteste conferirgli il premio Reale prima della morte. Nè dovrei passare sotto silenzio i confronti minuziosi del Felici fra le deduzioni del calcolo e l'osservazione nel campo della capillarità, nè tanti altri suoi studî, nè la passione che da squisito musicista prendeva ai problemi d'acustica aventi attinenza coll'arte. E vorrei rilevare com'egli, avverso alle ipotesi, accogliesse senza riserva quella della costituzione molecolare degli aeriformi nata dal Bernoulli e portata a sviluppo dal Clausius e dal Boltzmann, ed accettasse come un portato dell'esperienza l'altra delle ondulazioni luminose.

Ma il tempo trascorre, e non ho ancora dato risalto all'influenza benefica ch'egli esercitò fra noi infondendo da un lato la persuasione che gli studî fisici scompagnati da quelli matematici a ben poco possono approdare, e dall'altro invogliando i suoi colleghi di matematica ad occuparsi di questioni fisiche; nè ho per anco indicata la insigne benemerenza che si acquistò tenendo in vita, contro molteplici difficoltà, l'unico periodico italiano di fisica, il *Nuovo Cimento*, che informava gli stranieri dei nostri lavori, e noi teneva informati dei progressi scientifici. Questo periodico egli donò poi alla Società fisica italiana che lo aveva acclamato suo presidente onorario.

Peritoso com'era di mostrarsi in pubblico, scansò i pubblici uffici; ma il sentimento del dovere gl'impose di non sottrarsi a quello di rettore che abilmente esercitò a due riprese in tempi difficili. Fu anche più volte preside della Facoltà di scienze e consigliere della Scuola normale superiore; ma si può dire che con la severità dell'esempio e l'oculatezza del consiglio fu ininterrottamente per una lunga serie d'anni l'ispiratore d'ogni savio provvedimento in favore dei buoni studî a Pisa: ed a questo proposito mi piace riferirvi alcune delle parole pronunziate sul suo feretro dal nostro collega Antonio Pacinotti:

« L'amicizia di mio Padre pel Felici fu, sino dai primi ricordi della « mia infanzia, continua, sincera, costante, perchè fondata nella stima della « incorruttibile rettitudine del carattere. Ed io stesso, e per la gratitudine « che al Felici dovevo come discepolo e per le severe virtù che in lui am-

« miravo, sempre sono stato desideroso di poter meritare l'amicizia di sì va-
« lente uomo ».

Ed ora, illustri Colleghi, dopo questa semplice ed affrettata enumerazione de' suoi meriti eminenti, concedete che lasci alla nobiltà dell'animo vostro d'innalzare l'inno che glorifichi il grande maestro, lo scienziato insigne, il generoso divulgatore, il cittadino virtuoso, l'uomo intemerato: io mi sento inetto a trovarne l'espressione.

Alla mestizia onde sono invaso perdonate se non posso astenermi di parlarvi del martire.

Varcati di poco i settant'anni, il Felici, sempre più incontentabile di se stesso e rigido osservatore di quanto stimava doveroso, cominciò a temere che gli venissero meno la vigoría e la elasticità del pensiero, giudicò che altri potesse con maggior efficacia occupare la sua cattedra, pensò a scegliersi un successore nella pienezza dell'energia giovanile, e stoicamente piegò il capo ai rigori della legge crudele verso i veterani che in cattedra non voglion rimanere contro coscienza: multa, sfratto dal laboratorio, confisca dei mezzi di studio!

Però lo strazio ch'ebbe a provare il suo cuore gentile nello staccarsi dal suo lindo istituto, nell'abbandonare la diletta casuccia, fu superiore ad ogni forza umana di resistenza. Di quel momento solenne disse il suo baldo Successore nella commemorazione pel *Nuovo Cimento*: « Lo vedo ancora var-
« care la porta della palazzetta di Piazza San Simone, curvo come sotto il
« peso di una grande sventura, e salire in carrozza nascondendo la faccia
« per non mostrare la commozione ».

Dopo il colpo tremendo, la mente così limpida e sicura cominciò a velarsi ed a vacillare davvero, e negli anni che seguirono il 1892 il Felici, l'uomo grande, non fu più che un povero vecchio vagante nella nebbia, rischiarata soltanto da qualche pallido lampo al ricordo delle sue macchine, de' suoi apparecchi, delle indagini cui essi potevano servire.

Lo vidi una volta alla stazione che aspettava il treno per andare in villa presso Lucca: e procedeva incerto guidato, sorretto quasi, dall'attento amore della sua inseparabile consorte. Ma la guida fedele, vigile, assidua doveva mancargli: l'ottima signora Elisa spirò il 28 marzo 1897, e lo spirito del Felici la seguì. Da quel giorno rimase di lui un simulacro venerando che non valevano a rianimare le cure pietose della figlia Isabella e dei nipoti, nè le infantili carezze dei pronipoti.

Verso quel simulacro convergevano ogni anno i voti della Società fisica adunata, e nell'ottantesimo anniversario della nascita tutti fummo orgogliosi, colleghi, discepoli, ammiratori, d'inviargli in omaggio la prima copia della sua *Teoria dell'induzione*, che era stata pubblicata in tedesco fra le opere classiche delle scienze esatte.

Il 20 luglio di quest'anno, a Sant'Alessio di Lucca, il venerato simu-

lacro s'infranse, e Pisa adempiè tosto all'obbligo suo di richiamarne gli avanzi perchè fossero accolti nel monumentale Camposanto urbano, ed il 22 luglio là si celebrarono sul feretro i funerali. Ma le reliquie a noi sacre giacciono ancora senza tomba perchè « nuova legge impone oggi i sepolcri fuor » de' monumenti nazionali.

Deh! fate ogni vostra possa, illustri Colleghi, affinchè gli ostacoli siano superati senz'altro indugio: e la figlia desolata, co' suoi figli ed i figli dei figli, e gli amici ed i concittadini possano recare i tributi del loro affetto sopra un'urna decorosa, ed i cultori della Scienza, cercanti ispirazione in quell'incantevole tempio dell'Arte, non cerchino invano fra i sepolcri del Mossotti, del Montanelli, dei Savi, del Matteucci, dell'Orosi, del Cuppari, del Meneghini, del Betti il sepolcro di Riccardo Felici.

Risovvengavi che

« .... sugli estinti
« Non sorge fiore, ove non sia d'umane
« Lodi onorato e d'amoroso pianto ».

SCRITTI DI RICCARDO FELICI

1844. *Alcune osservazioni intorno alle nuove ricerche del sig. Dutrochet sulla forza epipolica.* Il Cimento, p. 134.

1846. *Nota sulla termoelettricità del mercurio.* Il Cimento. p. 165.

1847. *Sulla teoria del circuito galvanico.* Il Cimento, p. 289.

1850. *Sulla propagazione della corrente elettrica nell'interno di una sfera.* Annali di Tortolini, T. I, p. 312.

1851. *Sulle polarità galvaniche secondarie e sull'influenza del calore nella propagazione della corrente elettrica nei liquidi.* Annali delle Università toscane, T. II, P. II, p. 173.

— *Saggio di una spiegazione dei fenomeni di induzione elettrodinamica.* Annali di Tortolini, T. II, p. 65, 306.

— *Saggio teorico-sperimentale sulla legge secondo cui varia l'azione inducente di un circuito voltaico.* Id. p. 361.

— *Nota sulla teoria dei fenomeni di induzione elettrodinamica.* Id. p. 503.

1852. *Mémoire sur l'induction électrodynamique.* Annales de Chimie et de Physique. S. III, T. 34, p. 64.

1853. *Note sur les phénomènes d'induction.* Id. T. 39, p. 222.

— *Saggio di una applicazione del calcolo alle correnti indotte dal magnetismo in movimento.* Annali di Tortolini, T. IV, p. 173.

— *Sopra i fenomeni di induzione della bottiglia di Leida.* Id. p. 237.

1854. *Sulla teoria matematica dell'induzione elettrodinamica.* Annali delle Università toscane, T. III, P. II, p. 1.

— *Idem.* Seconda Memoria. Id. p. 99.

1854. *Nuova Nota sulla propagazione della elettricità voltaica nell'interno di una sfera.* Annali di Tortolini, T. V., p. 270.

— *Sulla teoria matematica delle correnti indotte in un corpo di forma qualunque.* Annali di Tortolini, T. V, p. 35.

— *Sur les courants d'induction dans les corps de forme quelconque.* Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 40, p. 251.

1855. *Sulla teoria matematica dell'induzione.* Terza Memoria. Annali delle Università toscane, T. IV, P. 2, p. 5.

— *Sur les courants induits par la rotation d'un conducteur autour d'un aimant.* Annales de Ch. et Ph. S. III. T. 44, p. 343.

— *Ricerche sulle leggi generali della induzione elettrodinamica.* Nuovo Cimento, T. I, p. 325.

— *Esperienze sopra un caso di correnti indotte, nel quale sarebbero nulle le forze elettrodinamiche esercitate dal conduttore inducente sopra l'indotto qualora fosse percorso da una corrente.* Id. T. II, p. 321. — Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 51, p. 501.

1856. *Sulla legge di Lenz, e sopra alcune recenti esperienze del prof. Matteucci sull'induzione elettrodinamica.* Nuovo Cimento, T. III, p. 198 — Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 51, p. 378.

— *Sulle leggi delle scariche indotte dalla bottiglia di Leida.* Nuovo Cimento, T. III, p. 208.

— *Osservazioni sopra l'interpretazione di alcune esperienze moderne di elettrostatica.* Id. T. IV, p. 266.

1859. *Sulla spiegazione del diamagnetismo, partendo dalla teoria dell'induzione elettrodinamica.* Id. T. IX, p. 16.

— *Esperienza sopra un caso singolare della induzione elettrodinamica.* Id. id. p. 75.

— *Nota sopra una osservazione del sig. De La Rive ad una delle esperienze fondamentali della teoria dell'induzione elettrodinamica.* Id. id. p. 345.

— *Esperienze che dimostrano che quando un corpo ruota sotto la influenza di una calamita, la forza che, in virtù delle correnti indotte, si sviluppa fra la calamita e il corpo indotto, è repulsiva od attrattiva a seconda della direzione del moto rotatorio, ma che la intensità della forza repulsiva è maggiore della attrattiva.* Id. T. X, p. 5.

— *Sur la cause des courants que l'on obtient dans un circuit dont les bouts immobiles s'appuient sur un conducteur tournant autour de l'axe d'un aimant cylindrique.* Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 56, p. 106.

1862. *Esperienze sulla velocità della elettricità, e sulla durata della scintilla.* Nuovo Cimento, T. XV, p. 339.

1863. Estratto in francese della Memoria precedente, fatto dall'Autore. Annales de Ch. et de Ph. S. III, T. 69, p. 248.

— *Nuove esperienze sopra la velocità della elettricità e sulla durata della scintilla.* Nuovo Cimento, T. XVII, p. 28. — Annali delle Università toscane, T. VIII, P. II, p. 5.

— *Rivista di lavori di fisica, pubblicati all'estero.* Nuovo Cimento, T. XIX, p. 5.

— *Rivista di lavori sulla elettrodinamica pubblicati all'estero.* Nuovo Cimento. T. XIX, pp. 202, 307; T. XX, p. 173.

— *Cenni di alcune esperienze di elettricità.* Id. T. XIX, id. p. 345.

1864. *Cenni di alcune esperienze di elettricità.* Id. T. XX, p. 73.

— *Sunto di una Memoria di T. M. Gaugain sopra la teoria dei condensatori elettrici allo stato di tensione permanente o variabile.* Id. id. p. 80.

1865. *Cenni di alcune esperienze di elettricità.* Nuovo Cimento, T. XXI-II, p. 380.
1866. *Cenni di alcune esperienze sulle superficie di capillarità.* Id. T. XXIII-XXIV, p. 151.
1867. *Esperienze per determinare la legge di oscillazione di un corpo elastico.* Id. T. XXVI, p. 255. — Annali delle Università toscane, T. IX, P. II, p. 81.
1871. *Nota ad una Memoria di Helmholtz sulla teoria matematica della elettricità dinamica.* N. Cimento, S. II, T. V-VI, p. 71.
— *Sulle azioni elettriche dei corpi non conduttori soggetti alla influenza di un corpo elettrizzato.* Id. id. id. pp. 5, 73. — Memorie della Società italiana di scienze, S. III, T. II, P. II, p. 249. — In sunto: Journal de Physique, T. III, p. 329.
1872. *Analyse du précedent Mémoire.* Archives de Genève, T. 43, p. 149.
1873. *Esperienze sulle forze elettromotrici indotte da un solenoide chiuso.* Nuovo Cimento, S. II, T. IX, p. 5.
— *Esperienze sul tempo impiegato da un coibente per ritornare allo stato naturale, cessata che sia l'azione inducente esteriore.* Id. T. X, p. 84.
1874. *Sopra un nuovo interruttore e sul suo uso in alcune esperienze di induzione.* Id. T. XII, p. 115.
1875. *Un'altra esperienza sulla rotazione del conduttore radiale.* Id. T. XIII, p. 224.
— *Di una modificazione dell'interruttore galvanico, e di alcune esperienze sull'extracorrente, e sulla legge con cui varia la intensità del magnetismo del ferro, dall'istante in cui cessa l'azione inducente della spirale voltaica.* Id. T. XIII, p. 266.
— *Exposé de quelques expériences qui interessent la théorie de l'induction.* Journal de Physique, T. IV, p. 228.
1876. *Notizie sulla vita e sugli scritti di Carlo Matteucci.* Memorie della Società italiana delle scienze, S. III, T. II, p. LXV.
— *Alcune avvertenze sopra una Nota pubblicata nell'anno 1856 nel* Nuovo Cimento, *relativamente all'induzione elettrostatica.* Nuovo Cimento, T. XV, p. 255.
— *Esperienza sull'azione esercitata da un corpo dielettrico in movimento sopra un corpo elettrizzato.* Id. T. XVI, p. 73.
1882. *Nota ad una esperienza dell'Ampère.* Id. S. III, T. XI, p. 243.
1883. *Appunti per lezioni di fisica sperimentale* (Pisa, Tip. Pieraccini).
1884. *Una esperienzn da lezione.* Nuovo Cimento, S. III, T. XVI, p. 160.
1888. *Sul potenziale di un conduttore in movimento sotto la influenza di un magnete.* Id. id. T. XXIV, p. 32.
— *Relazione sul concorso al premio Reale per la fisica.* Atti R. Acc. dei Lincei. Rend. (4) VII, p. 526.
1899. *Ueber die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induction von Riccardo Felici, uebersetzt von Dr. B. Dessau, herausgegeben von E. Wiedemann.* Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 109.

V. C.